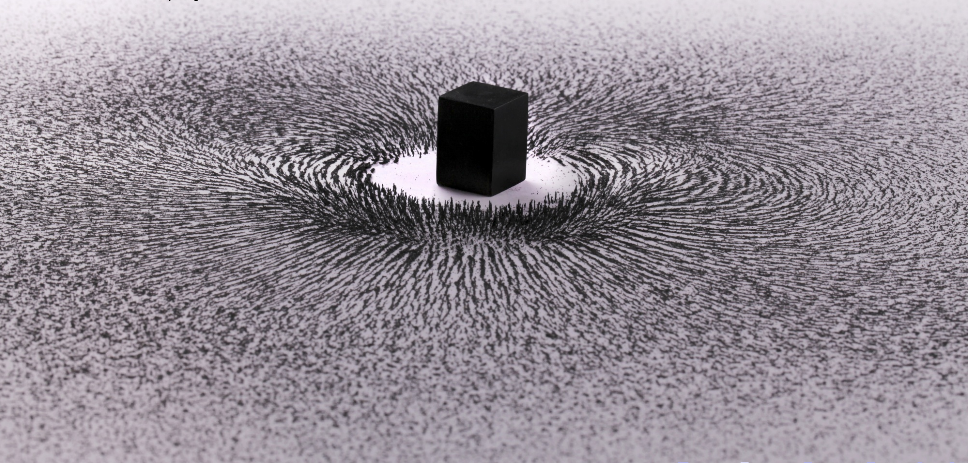
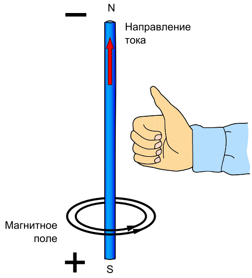
Движение заряженных частиц в электромагнитных полях – 2

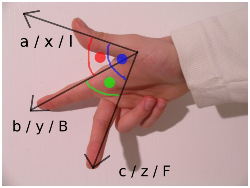
Р. Ю. Шендрик
Физический факультет

ИГУ
Физический
факультет

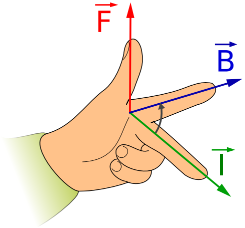




Магнитный диполь



Векторное произведение



Правило левой руки

Правило левой руки Флеминга используется для электродвигателей, в то время как правило правой руки Флеминга используется для электрических генераторов. Различные руки должны быть использованы для двигателей и генераторов из-за различий между причиной и следствием. В электрическом двигателе, электрический ток и магнитное поле существуют (которые являются причинами), и они приводят к возникновению силы, которая создает движение, и поэтому используется левая рука правила. В электрическом генераторе, движение и магнитного поля существуют (причины), и они приводят к созданию электрического тока (эффект), и поэтому используется правилу правой руки.

Заряженная частица со скоростью $\vec{v}$ влетает в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. Электрическое поле отсутствует. Опишите характер движения частицы:

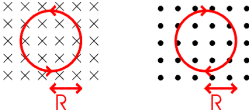
- Частица будет двигаться равномерно и прямолинейно
- Частица будет двигаться по окружности
- Нельзя дать однозначный ответ, так как не известен угол, под которым влетела частица
- Верно все вышеперечисленное

Часто на этот вопрос школьники отвечают, что частица движется по окружности, что не верно. Рассмотрим подробнее все возможные ситуации.

1. Векторы $\vec{v}$ и $\vec{B}$ направлены одинаково

Сила Лоренца в этом случае $F = q[\vec{v} \times \vec{B}] = qv \sin\alpha B$, так как $\alpha = 0$, то сила Лоренца равна 0, соответсветственно характер движения частицы не изменяется, и если она двигалась равномерно и прямолинейно, то такое движение продолжится. Тоже верно, если скорость частицы направлена против направления вектора магнитной индукции.

2. Частица влетает в магнитное поле со скоростью $\vec{v}$, направленной перпендикулярно вектору $\vec{B}$.



Сила Лоренца $F = q[\vec{v} \times \vec{B}] = qv \sin 90^{\circ} B = qvB$ всегда будет направлена перпендикулярно векторам скорости и индукции магнитного поля, таким образом она сообщает заряду центростремительное ускорение $a = \frac{v^2}{R}$. Второй закон Ньютона запишется тогда следующим образом:

$$m\frac{v^2}{R} = qvB,$$

R - радиус окружности, по которой движется заряд. Отсюда радиус окружности равен:

$$R = \frac{mv}{qB}.$$

Период обращения частицы равен: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$. Из последнего уравнения видно, что период обращения не зависит от скорости частицы.

ИГУ
Физический факультет

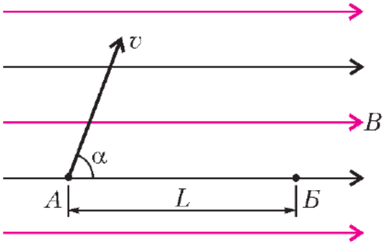
2. Частица влетает в однородное магнитное поле так, что вектор скорости $\vec{v}$ направлен под углом $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ к вектору индукции $\vec{B}$.

Разложим вектор скорости частицы $\vec{v}$ на две составляющие: параллельная направлению магнитной индукции $v_{\parallel} = v\cos\alpha$ и перпендикулярная направлению вектора индукции $\vec{B}$ $v_{\perp} = v\sin\alpha$. Сила Лоренца будет действовать перпендикулярно компоненте $v_{\perp}$. Вследствие этого частица движется по окружности радиусом $R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv\sin\alpha}{qB}$.

Одновременно с этим частица будет равномерно двигаться вдоль линий магнитной индукции со скоростью $v_{\parallel}$, так как эта скорость не вызывает появление силы Лоренца. Возникает движение по винтовой линии. Шаг винтовой линии:

$$h = v_{\parallel}T => h = \frac{2\pi mv\cos\alpha}{qB}$$

Электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. В точке А он имеет скорость $\vec{v}$, которая направлена под углом α к вектору индукции. При каких значениях индукции поля электрон окажется в точке на расстоянии L от точки А.



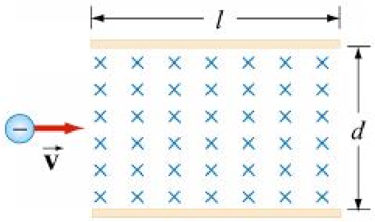
Электрон окажется в точке Б, сделав целое число шагов винтовой линии. Шаг винтовой линии мы уже вывели выше, поэтому используем эту формулу, но на экзамене школьник должен привести все наши рассуждения для пункта 3 задачи 1:

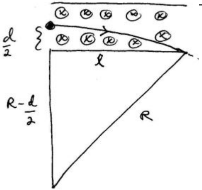
$$h = \frac{2\pi m v \cos\alpha}{qB} n,$$

где n целое число шагов, равное $n = 1, 2, 3 \ldots$.

ИГУ
Физический факультет

Электрон, двигаясь с некоторой начальной скоростью, попадает между двух пластин, где есть однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, направленной перпендикулярно скорости, как показано на рисунке. Вверх или вниз отклонится электрон, какую скорость будет иметь электрон, когда он достигнет конца пластин? Силой тяжести можно пренебречь.





Сила Лоренца, действующая на электрон $F = -e[\vec{v} \times \vec{B}] = -evB$, она направлена вниз. Важно помнить, что магнитное поле изменяет лишь направление силы, а ее модуль остается прежний. В данном случае скорость электрона в начальный момент времени перпендикулярна индукции, поэтому электрон будет двигаться по окружности радиусом: $R = \frac{mv}{eB}$. С другой стороны радиус можно определить из геометрических соображений:

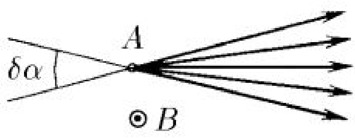
$$R^2 = (R - d/2)^2 + l^2 => R = \frac{d}{4} + \frac{l^2}{d}.$$

Подставляем это значение в выражение для радиуса и получаем скорость:

$$v = \frac{eB}{m}\left(\frac{d}{4} + \frac{l^2}{d}\right).$$

ИГУ Физический факультет

Из точки A со скоростью $\vec{v}$ вылетают частицы, имея малый угловой разброс $\delta\alpha$, и далее движутся в однородном магнитном поле индукции $\vec{B}$ перпендикулярно ему. Определите, на каком расстоянии от точки A соберется пучок, и оцените в этом месте его поперечный размер. Масса частиц m, заряд q.



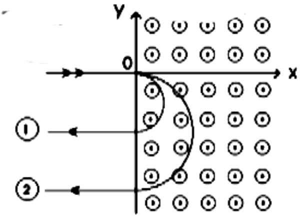
Выше мы показали, что угловая скорость и период обращения электрона в магнитном поле не зависят от величины скорости, поэтому независимо от угла вылета частица описывает окружность, время прохождения которой обусловлено только индукцией поля. Таким образом, в случае малого угла разлета электроны соберутся в точке, лежащей на окружности и противоположной точке вылета. Таким образом, электроны сфокусируются на расстоянии $L = 2R = 2\frac{mv}{qB}$. Размер пятна можно оценить по основанию трегуольника. Радиус пятна фокусировки равен

$$d = \delta l \sin\frac{\delta\alpha}{2} \approx \delta l \frac{\delta\alpha}{2}$$

$$dl = R\frac{\delta\alpha}{2} => d = \delta l\frac{\alpha^2}{4} => d = \frac{mv}{qB}\frac{\alpha^2}{4}$$

Физический факультет

Вся x-y плоскости справа от начала координат O заполнена однородным магнитным полем с индукцией $\vec{B}$, направленной перпендикулярно плоскости рисунка. Две заряженные частицы движутся вдоль оси в положительном направлении оси OX, каждая со скоростью $\vec{V}$ и влетают в поле в точке начала координат O. Обе частицы имеют одинаковую массу m, но разные заряды q_1 и q_2. Когда они попадают в магнитное поле, их траектории имеют одно и тоже направлениеи представляют собой полукруги с различными радиусами. Радиус полукруга, проходимый частицей 2 ровно вдвое больше, чем радиус полукруга, проходимый частицей 1. Определите положительно или отрицательно заряжены частицы и соотношение их зарядов.



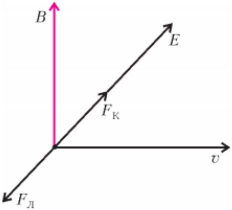
Заряды частиц положительны. Найдем их соотношение. Запишем второй закон Ньютона для каждой из частиц:

$$\frac{mv^2}{R_1} = q_1 vB$$

$$\frac{mv^2}{R_2} = q_2 vB => \frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Если заряженная частица движется по прямой линии в некоторой области пространства, правомерно ли утверждать, что магнитное поле в этой области равна нулю?

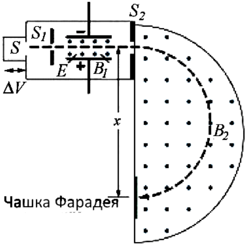
Не обязательно. Если магнитное поле параллельно или антипараллельно скорости заряженной частицы, то частица не будет испытывать какого-либо влияния силы Лоренца. Там также может присутствовать электрическое поле, которое действует таким образом, что $\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}] = 0$. Рассмотрим этот случай подробнее.



Подберем направление векторов силы Лоренца и наряженности электрического поля, чтобы они были направлены в противоположные стороны. Тогда индукция $\vec{B}$ и скорость частицы будут направлены как показано на рисунке. Таким образом, сила Лоренца запишется следующим образом:

$$qvB = qE => v = \frac{E}{qB}$$

На рисунке представлена принципиальная схема масс-спектрометра. Это устройство используется для измерения состава геологических образцов, путем измерения соотношения заряд масса у ионов, которые образуются, когда исследуемый раствор с помощью небулайзера впрыскивается в камеру S, где происходит его ионизация газовым разрядом и образование плазмы. Ионы массой m и зарядом q покидают камеру S, ускоряются разностью потенциалов $\Delta V > 0$, а затем поступают в камеру-селектор S1, в которой имеется регулируемое магнитное поле B_l и отклоняющее электрическое поле . Таким образом, только равномерно движущиеся частицы могут покинуть селектор. Дальше частицы попадают в камеру S2, где приложено магнитное поле B_2. Частица затем перемещается в полукруге, попадая на дачтик заряда (чашка Фарадея) на расстоянии x от входной щели. Какое магнитное поле B_1 должно быть приложено в камере селектора, чтобы частица прошла прямо через него и попала в камеру S2? Найдите выражение для соотношения масса-заряд частицы после того, как она попал в чашку Фарадея на расстоянии x от входной щели.



Движение частиц в смешанных полях

Задача 8. Решение

Найдем скорость ионов, которые покинули камеру небулайзера. Частицы прошли ускоряющую разность потенциалов ΔV, поэтому их потенциальная энергия равна $E_p = q\Delta V$, она равна кинетической энергии иона, которую он приобрел в этом ускоряющем поле. Запишем закон сохранения энергии для иона и выразим скорость вылета из камеры небулайзера v:

$$\frac{mv^2}{2} = q\Delta V => v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}.$$

Внутри селектора, как мы показали в прошлой задаче, на ионы действует сила Лоренца, так чтобы результат векторного произведения $[\vec{v} \times \vec{B}]$ лежал с вектором напряженности поля E на одной оси, но был направлен в противоположную сторону. Таким образом, $B = \frac{E}{v} = E\sqrt{\frac{m}{2q\Delta V}}$.

Силу, действующую на заряд в магнитном поле $\vec{B}_2$, можно представить следующим образом: $\vec{F}_2 = q[v\vec{i} \times B_2\vec{k}] = qvB_2\vec{j}$. До попадания на детектор частица проходит путь по полуокружности радиусом $\frac{x}{2}$, запишем второй закон Ньютона:

$$\frac{2mv^2}{x} = qvB_2 => x = \frac{2}{qB_2}\sqrt{2q\Delta Vm}$$

$$\frac{m}{q} = qvB_2 => x = \frac{B_2^2 x^2}{8\Delta V}$$

Движение в смешанных полях

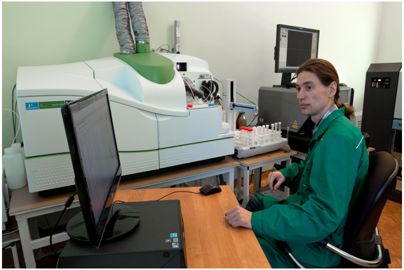
Масс-спектрометры в Институте геохимии

ИГУ Физический факультет

В Институте мы имеем несколько современных масс-спектрометров последней модели. Они активно используются для определения химического состава пород, а также возраста горных пород. Например, по цирконам можно определить возраст Земли. Студенты Физического и Геологического факультета успешно работают на этих приборах. Например, обслуживанием всего этого парка приборов занимаются выпускники направления Наноэлектроника.

Движение в смешанных полях

Масс-спектрометры в Институте геохимии



Магнитный момент плоского контура определяется следующим выражением:

$$\vec{\mu} = IS\vec{n}$$

Заряд q, вращающийся в магнитном поле представляет собой виток с током, поэтому для него магнитный момент запишется следующим образом:

$$\mu = \frac{q}{T}\pi r^2$$

С учетом выражения для силы Лоренца магнитный момент витка с током можно переписать:

$$\mu = \frac{mv^2}{2B}$$

Рассмотрим движение электрона вокруг протона – классический атом водорода. Предположим, что электрон движется вокруг ядра по круговой орбите с радиусом r. Определите частоту вращения электрона. Поместим атом водорода в магнитное поле перпендикулярное к плоскости орбиты. При условии, что радиус орбиты не меняется, вычислить сдвиг в угловой частоте орбитального движения в зависимсоти от индукции B магнитного поля.

Физический факультет

Магнитный момент витка тока в неоднородном магнитном поле сохраняется.

Магнитных зарядов не обнаружено, поэтому

$$div\vec{B} = 0 => \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}B_r r + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Пусть в $r = 0$ компонента поля слабо менятеся или не меняется по оси r, тогда можно выразить B_r через B_z:

$$rB_r = -1/2r^2 \left.\frac{\partial B_z}{\partial z}\right|_{r=0}$$

Запишем второй закон Ньютона для движущейся частицы в проекции на направления $(r, \theta, z$

$$m\frac{dV_r}{dt} = q(v_\theta B_z - v_z B_\theta) \tag{1}$$

$$m\frac{dV_\theta}{dt} = q(v_z B_r - v_r B_z) \tag{2}$$

$$m\frac{dV_z}{dt} = q(-v_\theta B_r + v_r B_\theta) \tag{3}$$

Так как поле имеет аксиальную симметрию, то $B_\theta = 0$

$$m\frac{dV_r}{dt} = qv_\theta B_z \tag{4}$$

$$m\frac{dV_\theta}{dt} = q(v_z B_r - v_r B_z) \tag{5}$$

$$m\frac{dV_z}{dt} = -qv_\theta B_r => \tag{6}$$

$$m\frac{dV_z}{dt} = \frac{qv_\theta r}{2}\left.\frac{\partial B_z}{\partial z}\right|_{r=0} \tag{7}$$

$$v_\theta = -sin\theta v_x + cos\theta v_y => \tag{8}$$

$$\text{движение по окружности, усредняя скорость получаем, что } v_\theta = v_\perp => \tag{9}$$

$$v_z m\frac{dV_z}{dt} = q\frac{v_\perp r}{2}\left.\frac{\partial B_z}{\partial z}\right|_{r=0} v_z \tag{10}$$

$$\frac{mv_\perp^2}{r} = qv_\perp B_z => mv_z\frac{dv_z}{dt} = \frac{mv_\perp^2}{2B_z}\left.\frac{\partial B_z}{\partial z}\right|_{r=0} v_z \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_z^2}{2}\right) = \frac{mv_\perp^2}{2}\frac{1}{B_z}\left.\frac{\partial B_z}{\cancel{\partial z}}\right|_{r=0}\frac{\cancel{dz}}{dt} \tag{12}$$

$$\frac{d}{dt}W_{kin} = \frac{d}{dt}W_z + \frac{d}{dt}W_\perp = 0 => \frac{dW_\perp}{dB} = -\frac{W}{B} = const, \text{ так как } \mu = -\frac{W}{B} => \mu = const \tag{13}$$

Определите минимальный радиус, который может иметь пучок электронов при переходе из поля с индукцией B_1 в поле с индукцией B_2 . Оси симметрии переходного поля и пучка совпадают. Радиус пучка в поле B_1 равен R, скорость пучка в поле B_1 параллельна индукции.

ИГУ Физический факультет

Ранее мы показали, что при движении в неоднородном поле магнитный момент витка с током, по которому движутся электроны сохраняется, поэтому

$$\frac{mV_1^2}{2B_1} = \frac{mV_2^2}{2B_2} \tag{14}$$

$$\frac{mv_1^2}{R} = ev_1B_1 => v_1 = \frac{eRB_1}{m} \tag{15}$$

$$v_2 = \frac{eR_2B_2}{m} \tag{16}$$

$$R^2B_1 = R_2^2B_2 \tag{17}$$

$$R_2 = R\sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \tag{18}$$

Неоднородное магнитное поле

Анимация

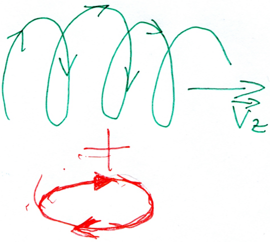
Какая часть электронов, испущенных во все стороны радиоактивной пылинкой, расположенной на оси магнитной ловушки, останется внутри этой ловушки? Индукция магнитного поля внутри ловушки B_1 , вне ее $B_2 > B_1$.

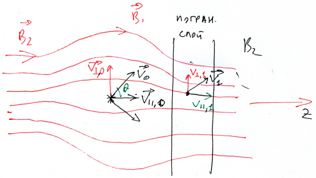
(Пробкотрон)

source

Неоднородное магнитное поле

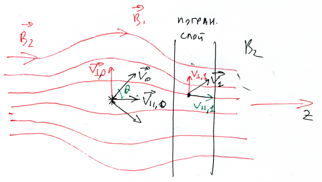
Задача 11. Решение





Неоднородное магнитное поле

Задача 11. Решение



Магнитный момент при движении в неоднородном поле является инвариантом, таким образом:

$$\frac{mV_{0\perp}^2}{2B_1} = \frac{mV_{1\perp}^2}{2B_2}$$

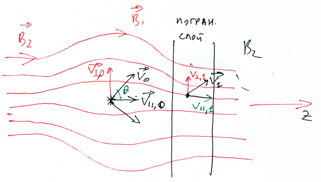
Полная кинетическая энергия системы сохраняется, таким образом:

$$\frac{mv_{0\perp}^2}{2} + \frac{mv_{0z}^2}{2} = \frac{mv_{1\perp}^2}{2} + \frac{mv_{1z}^2}{2}$$

$$v_{0\perp}^2 + v_{0z}^2 = v_{1\perp}^2 + v_{1z}^2$$

С учетом того, что магнитный момент не изменяется:

$$v_{0\perp}^2 = \frac{B_1}{B_2} v_{1\perp}^2$$



Тогда выражение для энергии имеет вид:

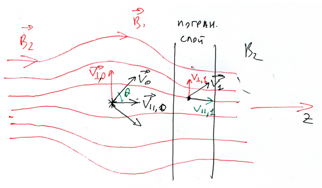
$$v_{0\perp}^2(1-\frac{B_2}{B_1})+v_{0z}^2=v_{1z}^2$$

Условие отражения электрона от границы между полями - $v_{1z}=0$, то есть частица вернется назад, если v_{1z} больше нуля, тогда частица покинет поле B_1, то есть условие того, что частица остается в ловушке:

$$v_{0\perp}^2(1-\frac{B_2}{B_1})+v_{0z}^2\leq 0$$

Неоднородное магнитное поле

Задача 11. Решение



Таким образом, видно, что если направление начальной скорости частицы лежит в конусе с углом $tg\theta = \frac{v_{0\perp}}{v_{0z}}$, то частица покинет магнитную ловушку:

$$v_{0z}^2 \geq (\frac{B_2}{B_1} - 1)v_{0\perp}^2$$

$$tg^2\theta = \frac{1}{(\frac{B_2}{B_1} - 1)}$$

Ток через площадку, которую видно из конуса с углов θ равен $I = \iiint jsin\theta d\theta d\phi dr = 2 * 2\pi \iint_0^\theta jdr(-cos\theta)d\theta$. Полный ток через сферу равен $4\pi \int jdS$, тогда доля электронов в конусе равна $N = 1 - cos\theta$. Таким образом, число электронов, вылетающих из ловушки равно $N = 1 - \sqrt{(1 - B_1/B_2)}$.

(Пояса Земли)

source

Рассмотренная в задаче конструкция магнитного поля называется пробкотрон Будкера или магнитная бутылка, подобного рода конструкции применяются для удержания плазмы, что необходимо в будущих реакторах термоядерного синтеза. Подобное явление наблюдается и в природе и защищает нас от космических заряженных частиц высоких энергий. Кстати, на нашем факультете есть кафедра, которая успешно занимается проблемами физики плазмы :)

Заключение

В лекции мы рассмотрели различные типы задач, которые могут встретится школьникам. Многие из них являются простыми, но хорошо описывающими, моделями реальных физических явлений, приборов и установок. Многие из них успешно применяются и работают в лабораториях Физического факультета ИГУ!

Используемые источники

- Заглавный слайд - принт «Магнетизм», художник Ахмад Матер, Британский музей, 2012
- Задачник под ред. О. Я. Савченко, НГУ
- Портал «Яндекс ЕГЭ»
- Фейнмановские лекции по физике и материалы лекций и семинаров MIT по электродинамике и физике плазмы
- Видео-модели взяты с сайта Университета Пенсильвании (PSU)