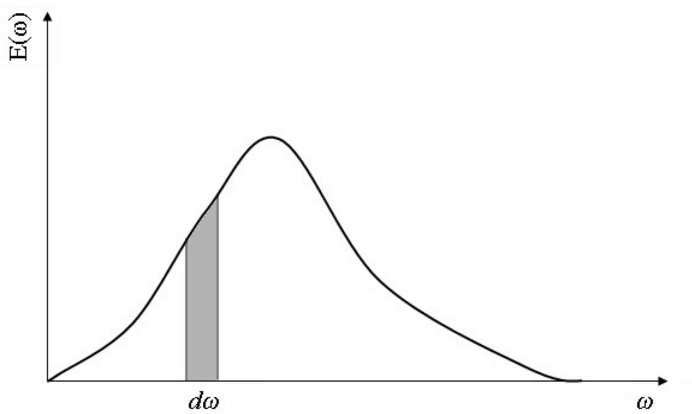
4.2 Распространение немонохроматических волн в изотропных средах.

Рассмотрим волну произвольного спектрального состава, распространяющуюся в изотропной среде с показателем преломления $n(\omega)$. Волновой вектор такой волны $k(\omega)=\frac{\omega}{c}n(\omega)$, для простоты будем считать, что $n(\omega)$- действительное число, поглощение в среде отсутствует (вдали от линии поглощения)



Введем обозначение $E(\omega)\Rightarrow E(i\omega)$

Волне такого спектрального состава соответствует импульс, форма которого изменяется во времени.

$$E(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}E(i\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

Для монохроматической волны при входе в среду $E_{\omega}(t,0)=E(i\omega)e^{-i\omega t}$,

Тогда в среде $E_{\omega}(t,z)=E(i\omega)e^{-i(\omega t-kz)}$, так как $k(\omega)=\frac{\omega}{c}n(\omega)$, $kz=\varphi(\omega)$

$$E(t,z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}E(i\omega)e^{-i[\omega t-\varphi(\omega)]}d\omega\ ,$$

То есть каждая компонента испытывает свой фазовый сдвиг $\varphi(\omega)$, и форма импульса искажается

$E(t,z)\neq E(t,0)$

Если $\Delta\omega$ мало, тогда мала и дисперсия.

Однако существует условие, при котором импульс формы не теряет. Пусть импульс описывается выражением

$$E(t,z)=A\left(t-\frac{z}{V_{гр}}\right)e^{-i(\omega_0 t-k_0 z)}$$

В этом случае $\Delta t=\frac{\Delta z}{V_{гр}}$, $A\left[(t+\Delta t)-\frac{z+\Delta z}{V_{гр}}\right]=A\left(t-\frac{z}{V_{гр}}\right)$

Импульсы, описываемые таким выражением, называют волновыми пакетами.

<u>Бигармоническая волна.</u>

Рассмотрим суперпозицию волн с частотами ω_1 и ω_2 распространяющуюся в среде.

$$E(t) = A\cos(\omega_1 t - k_1 z) + A\cos(\omega_2 t - k_2 z) = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}z\right)\cos(\omega_0 t - k_0 z)$$

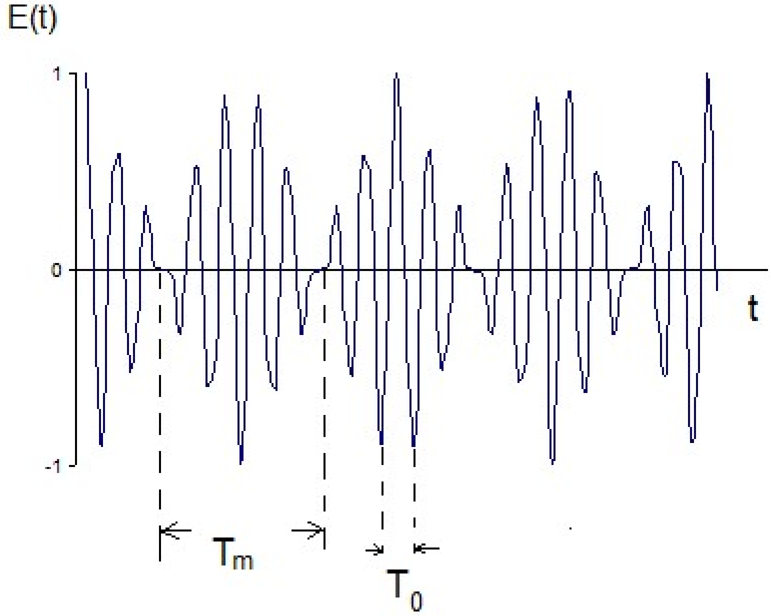
Где $\omega_0 = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

$k_0 = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$

Введем $\omega_м = \dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ и $k_м = \dfrac{k_1 - k_2}{2}$

$T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ $T_м = \dfrac{2\pi}{\omega_м}$

$E(t) = 2A\cos(\omega_м t - k_м z)\cos(\omega_0 t - k_0 z)$

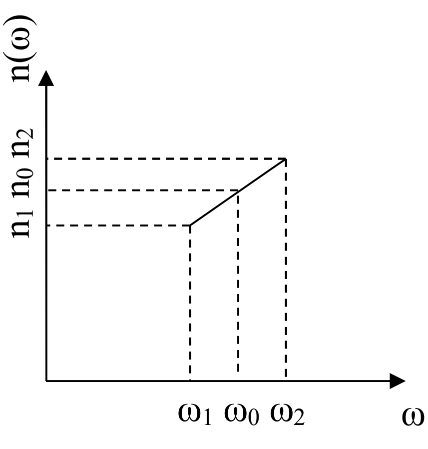


$\omega_0 t - k_0 z$ =const – поверхность одинаковой фазы.

$\omega_м t - k_м z$ =const- поверхность одинаковой амплитуды.

$V_ф = \dfrac{\omega_0}{k_0} = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2}$

$V_{гр} = \dfrac{\omega_м}{k_м} = \dfrac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$



При распространении света в вакууме

$V_ф = \dfrac{\omega_0}{k_0} = c$, $V_{гр} = \dfrac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 - \omega_2}c = c$, $V_ф = V_{гр} = c$.

Однако в среде

$V_ф = \dfrac{\omega_0}{k_0} = \dfrac{\omega_0}{k_0 n(\omega)} = \dfrac{\omega_0}{\frac{\omega_0}{c}n(\omega)} = \dfrac{c}{n(\omega)}$, $k = \dfrac{\omega_0}{c}n(\omega_0)$

$\omega_1 = \omega_0 - \dfrac{\Delta\omega}{2}$

$$\omega_2 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$$

$$V_{гр} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

$$k_1 = \frac{\omega_1}{c}\left(n(\omega_0) - \frac{\Delta n}{2}\right)$$

$$k_2 = \frac{\omega_2}{c}\left(n(\omega_0) + \frac{\Delta n}{2}\right)$$

$$\Delta k = \frac{1}{c}\left[\omega_2 n(\omega_0) - \omega_1 n(\omega_0) + \frac{\Delta n(\omega_2 + \omega_1)}{2}\right]$$

$$\Delta k = \frac{1}{c}\left[\Delta\omega n(\omega_0) + \Delta n\omega_0\right]$$

$$V_{гр} = \frac{c\Delta\omega}{\Delta\omega n(\omega_0) + \Delta n\omega_0}$$

$$V_{гр} = \frac{c\Delta\omega}{n(\omega_0) + \frac{\Delta n}{\Delta\omega}\omega_0}$$

В вакууме $V_{гр} = c$ так как $n(\omega_0) = 1$ $\Delta n = 0$

В среде несущая волна как бы протаскивается сквозь огибающую волну.

Распространение пакетов.

Рассмотрим распространение волны произвольного спектрального состава,

$$E(t,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E(i\omega)e^{-i\omega t}d\omega = A(t)e^{-i\omega_0 t},$$

где

$$A(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E(i\omega)e^{-i(\omega-\omega_0)t}d\omega$$ -амплитуда волны.

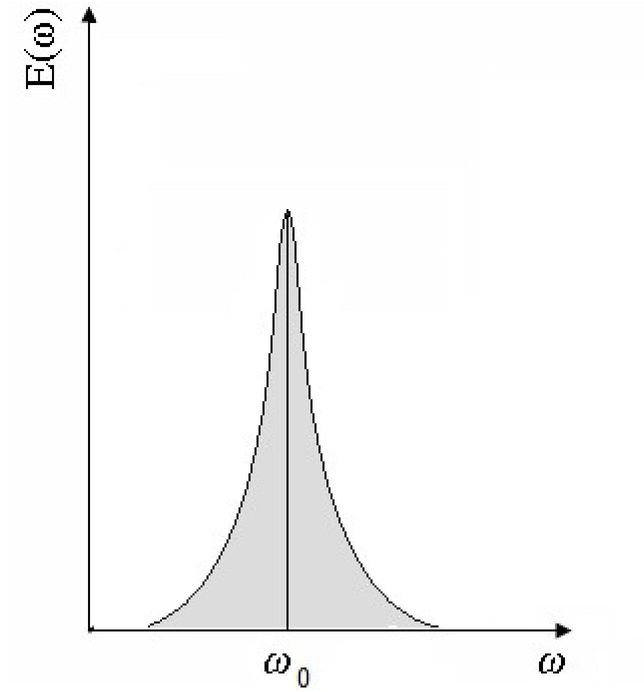
В точке Z:

$$E(t,Z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E(i\omega)e^{-i[\omega t - \varphi(\omega)]}d\omega$$

Для квазимонохроматического света, разложим $\varphi(\omega)$ в ряд Тейлора в окрестности ω_0.

$$\varphi(\omega) = \varphi(\omega_0) + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\right|_{\omega=\omega_0}(\omega - \omega_0) + \left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}\right|_{\omega=\omega_0}(\omega - \omega_0)^2 + \ldots$$

Тогда



$$E(t,z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}E(i\omega)e^{-i\left[\omega t-\varphi(\omega_0)-\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\right|_{\omega=\omega_0}\right]}d\omega=$$

$$=e^{-i[\omega_0 t-\varphi(\omega_0)]}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}E(i\omega)e^{-i(\omega-\omega_0)\left(t-\varphi'_{\omega=\omega_0}\right)}d\omega$$

Получили выражение для амплитуды:

$$A\left(t-\varphi'_{\omega=\omega_0}\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}E(i\omega)e^{-i(\omega-\omega_0)\left(t-\varphi'_{\omega=\omega_0}\right)}d\omega$$

$$E(t,z)=A\left(t-\varphi'_{\omega=\omega_0}\right)e^{-i[\omega_0 t-\varphi(\omega_0)]}$$

Волновой пакет описывается выражением:

$$E(t,z)=A\left(t-\frac{z}{V_{гр}}\right)e^{-i[\omega_0 t-\varphi(\omega_0)]}$$

$$\varphi=\frac{\omega}{c}n(\omega)z$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\right|_{\omega=\omega_0}=z\left[\frac{1}{c}n(\omega_0)+\frac{\omega_0}{c}\left.\frac{\partial n(\omega)}{\partial\omega}\right|_{\omega=\omega_0}\right]$$

отсюда:

$$V_{гр} = \frac{c}{n(\omega_0) + \omega_0 \left.\frac{\partial n(\omega)}{\partial \omega}\right|_{\omega=\omega_0}}$$

Для того, что бы пакет не расплывался необходимо выполнение условия:

$$\left.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2}\right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 << \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \omega}\right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)$$

В долазерной физике рассматривались длительные импульсы. Форма импульса не искажалась при распространении света в среде.

Если τ - мало, спектр широкий, каждая спектральная компонента движется со своей фазовой скоростью.

Понятие групповой скорости определено только для области нормальной дисперсии. В области нормальной дисперсии $\frac{\partial n}{\partial \omega} > 0$; n -увеличивается с ростом ω, более высокие частоты имеют меньшую скорость!

Групповая скорость есть скорость распространения сигнала, она всегда меньше скорости света, а фазовая может быть и больше.

P.S... Можно выразить $V_{гр}$ через λ - длину волны в среде.

$$V_{гр} = 1\Big/ \frac{dk}{d\omega}_{\omega=\omega_0}; \; V_{гр} = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{\omega=\omega_0}; \; \lambda = \frac{2\pi c}{\omega n}; \; k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda n}$$

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk}$$

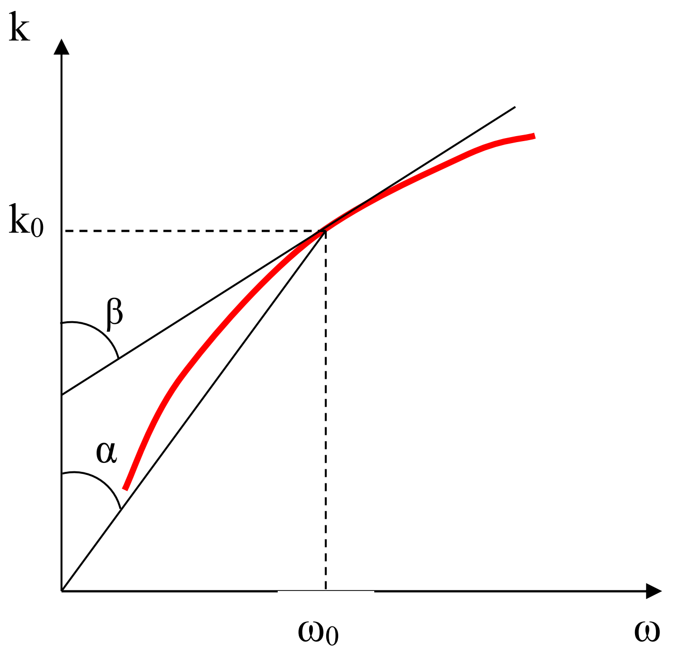
$$\frac{d\omega}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{n^2 \lambda^2}\left(n + \lambda \frac{dn}{d\lambda}\right)$$

$$\frac{d\lambda}{dk} = -\frac{\lambda^2}{2\pi}$$

$$\boxed{V_{гр} = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{\lambda_0}{n}\left.\frac{dn}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}\right)}$$

<u>Временное преобразование .</u>

<u>Сжатие импульса.</u>



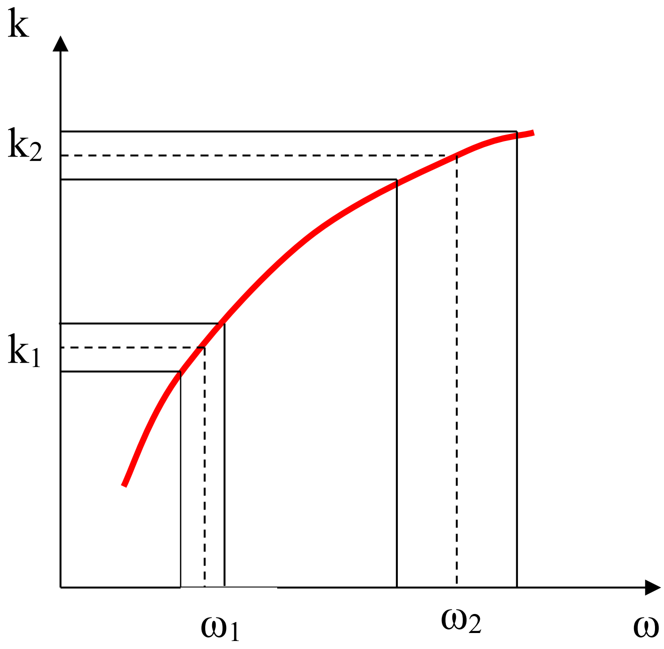
$$E(t,z)=A\left(t-\frac{z}{V_{гр}}\right)e^{i(\omega_0 t-k_0 z)}$$

$$V_ф=\frac{\omega_0}{k_0}=tg\alpha$$

$$V_{гр}=\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{\omega=\omega_0}=tg\beta$$

Распространение света в средах с дисперсией групповой скорости.

Пусть в среде распространяется два импульса с ширинами спектров $\Delta\omega_1$ и $\Delta\omega_2$ с центрами при ω_1 и ω_2 импульсы входят в среду одновременно. Расстояние L они проходят с задержкой $\Delta\tau=\frac{L}{V_{g1}}-\frac{L}{V_{g2}}=L\left[\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_2-\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_1\right]$



Можно представить $\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_2=\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_1+\left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_1(\omega_2-\omega_1)$

Тогда $\Delta\tau=L\left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_1(\omega_2-\omega_1)$

Если импульс имеет широкий спектральный состав $\Delta\omega_0$, тогда каждая часть импульса движется со своей скоростью, а изменение временной задержки $\Delta\tau=L\left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_1 d\omega$

$$\frac{d^2k}{d\omega^2}=\frac{d\dot{\vec{V}}_g}{d\omega}=-\frac{1}{V_g^2}\frac{dV_g}{d\omega}$$ -

дисперсия групповой скорости

$$\frac{d\tau}{d\omega}=L\left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_1$$

Увеличение длительности импульса на расстоянии L

$$\Delta\tau = \frac{d\tau}{d\omega}\Delta\omega = L\frac{d^2k}{d\omega^2} = \left[\frac{d\left(\frac{L}{V_g}\right)}{d\omega}\right]\Delta\omega$$

$$\Delta\tau = -\Delta\omega\frac{L}{V_g^2}\frac{dV_g}{d\omega}$$

Если $\frac{dV_g}{d\omega} > 0$, то $\frac{d^2k}{d\omega^2} < 0$

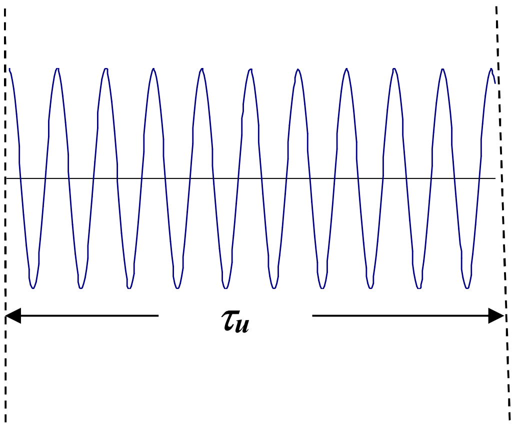
$\Delta\tau < 0$ импульс будет сжиматься.

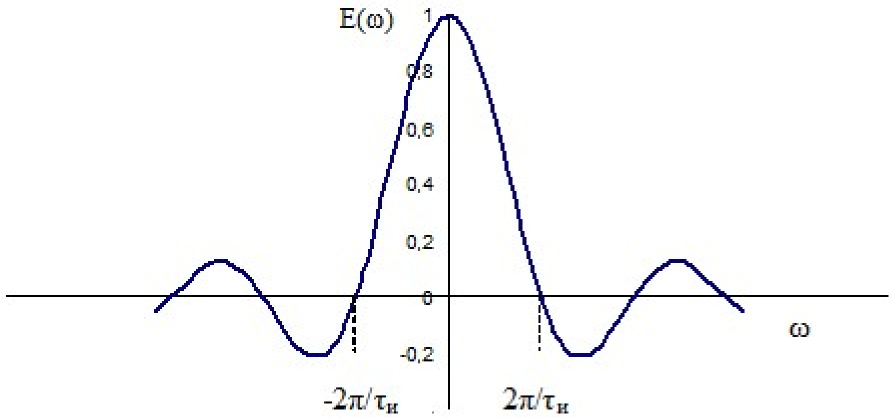
Если $\frac{dV_g}{d\omega} < 0$,то $\frac{d^2k}{d\omega^2} > 0$

$\Delta\tau > 0$ импульс расширяется.

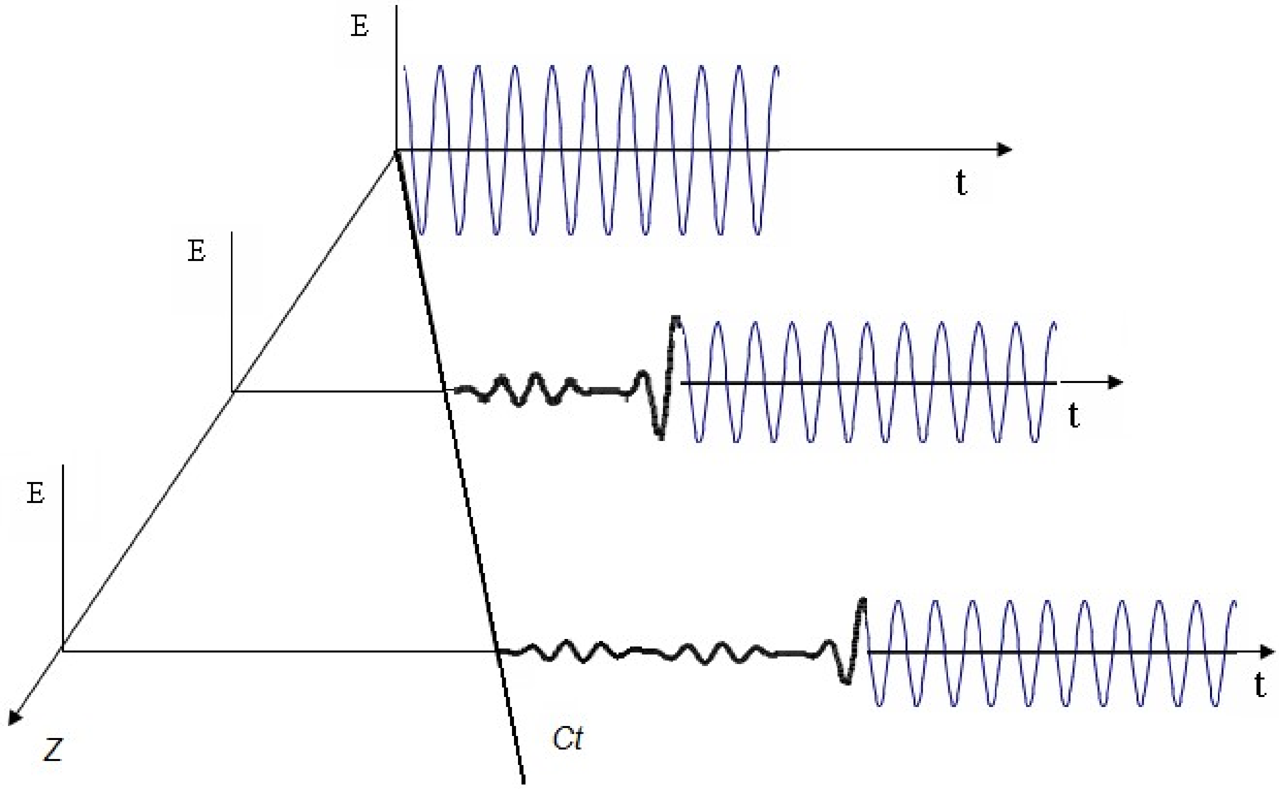
Если $\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau}$, тогда $\Delta\tau = -\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)\frac{L}{V_g^2}\frac{dV_g}{d\omega}$ в средах нормальной дисперсии.

Понятие сигнальной скорости.





Пусть на вход диспергирующей среды подан импульс в виде цуга, спектр цуга представлен на рисунке, и содержит весь спектр временных частот. Высокие частоты распространяются со скоростью С. До момента $t = \frac{z}{c}$ среда не возмущена. Никакая волна не достигает точки Z, раньше, чем за $t = \frac{z}{c}$. При $t = \frac{z}{c}$ приходит первый предвестник; его амплитуда с увеличением t растет, а $\omega >> \omega_0$. За первым предвестником следует второй. Приближение основной части сигнала характеризуется увеличением амплитуды. Эта часть распространяется со скоростью меньшей скорости света в вакууме. Возникает вопрос, что в этом случае принять за скорость сигнала? Простое выражение сигнальной скорости V_c не может быть дано: её определение неоднозначно и связано с методом вычисления. Физический смысл: это скорость той части сигнала, прибытие которой может быть зарегистрировано прибором.


E
t
E
t
E
t
Z
Ct