

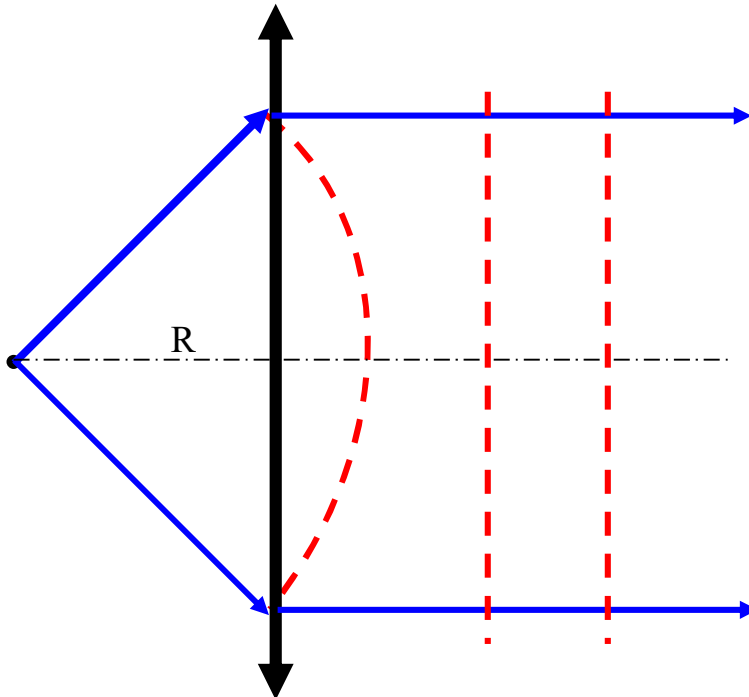
Формирование оптического изображения

Рассмотрим поле расходящейся сферической волны, комплексная амплитуда которой на расстоянии R от источника имеет вид:

$$\varepsilon(R) = \varepsilon_0 \frac{\exp(-ikR)}{R}.$$

Амплитуда поля в плоскости (X, Y) , находящейся на расстоянии z_0 от источника, для малых расстояний от оси Z , т.ч. $x^2, y^2 \ll z_0^2$ (в *параксиальном* приближении), описывается выражением :

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, y, z_0) &\approx \varepsilon_0 \frac{\exp\left[-ik(z_0^2 + x^2 + y^2)^{1/2}\right]}{z_0} \approx \varepsilon_0 \frac{\exp\left[-ikz_0\left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2z_0^2}\right)\right]}{z_0} = \\ &= \varepsilon_0 \frac{\exp(-ikz_0)}{z_0} \exp\left(-ik \frac{x^2 + y^2}{2z_0}\right). \end{aligned}$$



В этом выражении второй множитель описывает задержку фазы колебаний различных точек сферической волны в плоскости (X, Y) относительно оси системы.

Поместим теперь в этой плоскости некоторый объект, компенсирующий задержку фазы. Тогда на выходе объекта формируется волна, колебания всех

точек которой происходят с одинаковой фазой, т. е. формируется плоский волновой фронт с амплитудой волны $\varepsilon(x, y) = const$, движущийся по оси Z .

Функция пропускания такого объекта, называемого *линзой*, которая компенсирует задержку фазы для параксиальных лучей, очевидно, имеет вид

$$T(x, y) = \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2z_0}\right) \quad (3.13)$$

а расстояние z_0 до источника сферического волнового фронта, преобразуемого данной линзой в плоский фронт, назовем фокусным расстоянием и обозначим как f . Эта величина определяется физическими параметрами линзы: геометрией и размерами преломляющих поверхностей, а также показателем преломления материала n . В частности, можно показать, что в параксиальном приближении для простейшего случая тонкой плоско-выпуклой линзы со сферической преломляющей поверхностью радиуса R функция пропускания имеет вид (3.13), где

$$z_0 \equiv f = \frac{R}{n-1}.$$

Рассмотрим теперь процедуру построения изображения объекта с помощью линзы. В силу симметрии по координатам функции пропускания (3.13), возьмем, для простоты, одномерный объект с функцией пропускания $t(x)$. Полагая, что амплитуда поля волны, падающей на объект равна единице, на выходе получим распределение поля вида $\varepsilon_0(x) = t(x)$. На расстоянии $z = a$ от объекта расположим линзу и построим изображение объекта на произвольном расстоянии $z = b$ от линзы (см. рис. 3.10).

Сначала с помощью интеграла Френеля (3.4) найдем амплитуду светового поля в произвольной точке плоскости *на входе* линзы :

$$\varepsilon_1(x') = \int_{-\infty}^{\infty} t(x) \exp\left[\frac{ik}{2a}(x-x')^2\right] dx. \quad (3.14)$$

Умножив это выражение на одномерную функцию пропускания линзы, найдем амплитуду поля в той же точке *на выходе* линзы:

$$\varepsilon_2(x') = \exp\left(ik \frac{x'^2}{2f}\right) \varepsilon_1(x'). \quad (3.15)$$

Наконец, амплитуда поля в произвольной точке плоскости, расположенной на расстоянии b справа от линзы, описывается выражением:

$$\varepsilon_3(x'') = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{ik}{2b}(x' - x'')^2\right] \varepsilon_2(x') dx' \quad (3.16).$$

Подставив в (3.16) выражения для $\varepsilon_2(x')$ и $\varepsilon_1(x')$, находим после преобразований

$$\begin{aligned} \varepsilon_3(x'') = \\ = \exp\left(\frac{ikx''^2}{2b}\right) \int_{-\infty}^{\infty} t(x) \exp\left(\frac{ikx^2}{2a}\right) dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(Bx'^2 + 2Ax')] dx' \end{aligned} \quad (3.17)$$

где введены обозначения:

$$A = -\frac{k}{2}\left(\frac{x}{a} + \frac{x''}{b}\right); \quad B = \frac{k}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f}\right).$$

Последний интеграл в (3.17) с учетом формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(iBx^2) dx = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2B}} = \text{const} \equiv C$$

равен $C \exp\left(-i\frac{A^2}{B}\right)$.

Рассмотрим два случая:

1) Найдем распределение амплитуды поля в задней фокальной плоскости линзы, где $b = f$, т.е. $B = k/2a$. Формула (3.17) здесь примет вид:

$$\varepsilon_3(x'') = CD \exp\left(\frac{ik'x''^2}{2f}\right) \int_{-\infty}^{\infty} t(x) \exp\left(-\frac{ikxx''}{f}\right) dx,$$

где $k' = k(1 - a/f)$. Отсюда следует, что (с точностью до фазового множителя, не влияющего на распределение интенсивности) в задней фокальной плоскости линзы формируется Фурье-образ функции пропускания объекта $t(x)$ по переменной kx''/f , которая в обычном приближении малых углов дифракции равна поперечной компоненте волнового вектора $k_x = k \sin \varphi_x \approx k \varphi_x \approx kx''/f$:

$$E_3(k_x) = CD \int_{-\infty}^{\infty} t(x) \exp(-ik_x x) dx. \quad (3.18)$$

В этом приближении интеграл (3.18) можно также записать в виде, аналогичном формуле (3.7)

$$E_3(\varphi) = CD \int_{-\infty}^{\infty} t(x) \exp(-ikx \sin \varphi) dx.$$

2) Найдем распределение амплитуды светового поля в плоскости, расстояние которой от линзы b удовлетворяет соотношению:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f} = 0, \quad \text{т.е.} \quad B = 0.$$

Последний интеграл в (3.17) можно теперь взять в конечных пределах по апертуре линзы, т.е. по отрезку $[-D/2, D/2]$:

$$\int_{-D/2}^{D/2} \exp(2iAx') dx' = D \operatorname{sinc}(AD). \quad (3.19)$$

Учитывая, что длина волны мала по сравнению с размером линзы, можно в этом выражении перейти к пределу

$$D \operatorname{sinc}(AD) \xrightarrow{D \rightarrow \infty} \delta(A) = \delta\left(\frac{x}{a} + \frac{x''}{b}\right), \quad (3.20)$$

и подставив в интеграл (3.17), найти амплитуду светового поля

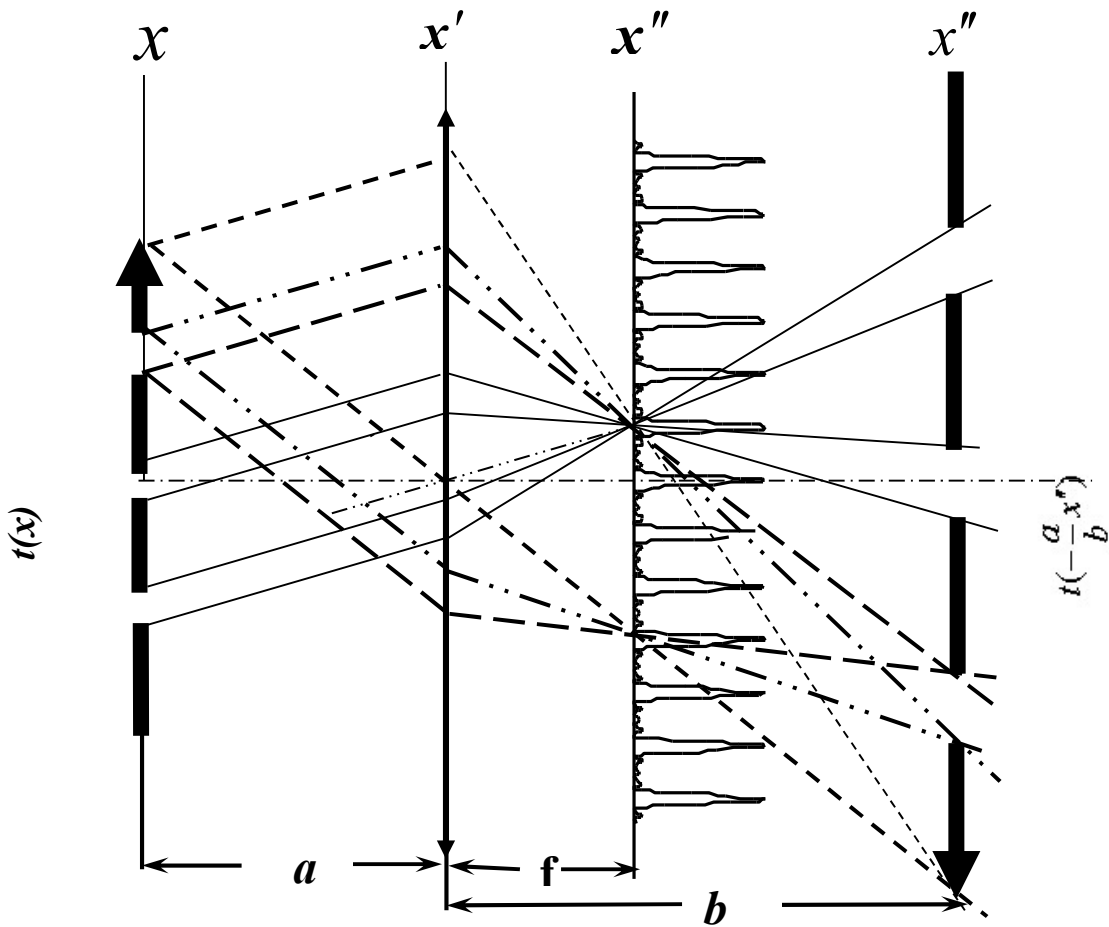


Рис. 3.10. Схема построения изображения решетки, расположенной в плоскости x , с помощью линзы, помещенной в плоскости x' . Справа от линзы на расстоянии f находится фокальная плоскость, на расстоянии b - плоскость изображения

$$\varepsilon_3(x'') = \exp\left[\frac{ikx''^2}{2b}\left(1 - \frac{a}{b}\right)\right] t\left(-\frac{a}{b}x''\right). \quad (3.21)$$

Формула (3.21) показывает, что распределение амплитуды в данной плоскости с точностью до фазового множителя совпадает с распределением амплитуды в плоскости объекта, задаваемым его функцией пропускания $t(x)$. Поэтому рассматриваемую плоскость естественно назвать плоскостью («перевернутого») изображения объекта, масштаб которого как видно из (3.21) увеличился в b/a раз. Описанную процедуру построения изображения объекта в виде дифракционной решетки иллюстрирует рис.3.10.

Из формул (3.19), (3.20) также видно, что точка с координатой x в плоскости объекта переводится линзой в точку координатой $(a/b)x''$ в плоскости изображения только в случае линзы "бесконечно большой" по сравнению с длиной волны. Если же учитывать конечную апертуру линзы, то вместо точки мы получим в плоскости изображения распределение амплитуды светового поля, описываемое функцией $\text{sinc}(AD)$, точнее - с учетом круговой формы апертуры - формулой вида (3.9)'. Характерный угловой размер получившегося светового пятна (Эйри) определяется формулой (3.9'') и увеличивается с уменьшением отношения λ/D . Следовательно, дифракция излучаемой объектом волны на конечной апертуре линзы приводит к "размазыванию" изображения объекта и ухудшению его качества.

Проведенное построение показывает, что формирование линзой изображения объекта, рассматриваемое как дифракционный процесс, можно разделить на два этапа. На первом этапе происходит разложение (анализ) светового поля объекта в Фурье-спектр, который формируется в задней фокальной плоскости линзы. На втором этапе последующее распространение световой волны приводит к восстановлению (синтезу) уже изображения объекта в плоскости изображения. Отсюда следует, что, во-первых, по виду спектра в фокальной плоскости линзы можно установить параметры собственно объекта, во-вторых, воздействуя на спектр объекта, можно управлять параметрами его синтезированного изображения.

Эксперимент Аббе-Портера.

Идея:

Воздействуя на Фурье – образ объекта в фокальной плоскости внести изменения в изображение объекта. Изменения производятся с помощью масок различной формы. Схема одного из классических опытов Аббе по пространственной фильтрации показана на рисунке 4. Расположенная перед линзой проволочная сетка освещается направленным пучком когерентного света. В задней фокальной плоскости линзы формируется двумерный фурье-образ сетки — регулярно расположенные по вертикали и по горизонтали световые пятна. Допустим, в фокальной плоскости установлен экран с узкой щелью, через которую проходит только один горизонтальный ряд световых пятен. Тогда из спектра пространственных частот удаляются частоты модуляции светового поля по вертикали, поэтому структура горизонтальных линий сетки в изображении не формируется. В плоскости изображения наблюдаются только вертикальные линии сетки.

Очевидно, что поворотом щели в вертикальное положение можно устранить в изображении сетки вертикальные линии, оставив горизонтальные. Перекрывая горизонтальные ряды пятен интенсивности через один ряд, можно получить удвоение горизонтальных линий в изображении, то есть ложные элементы в изображении. Перекрытие центрального максимума интенсивности приводит к обращению контраста — негативному изображению.

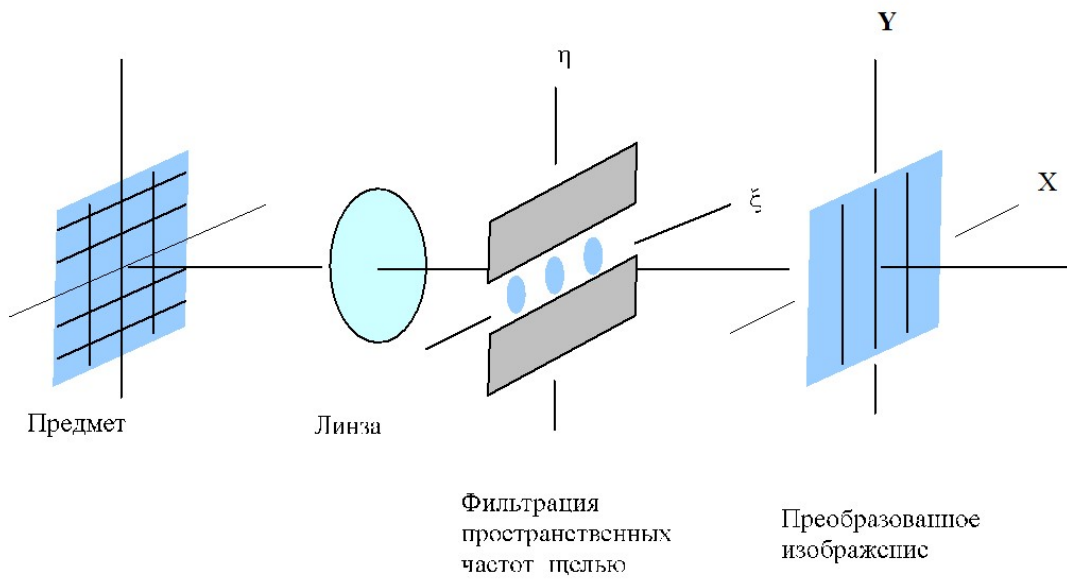
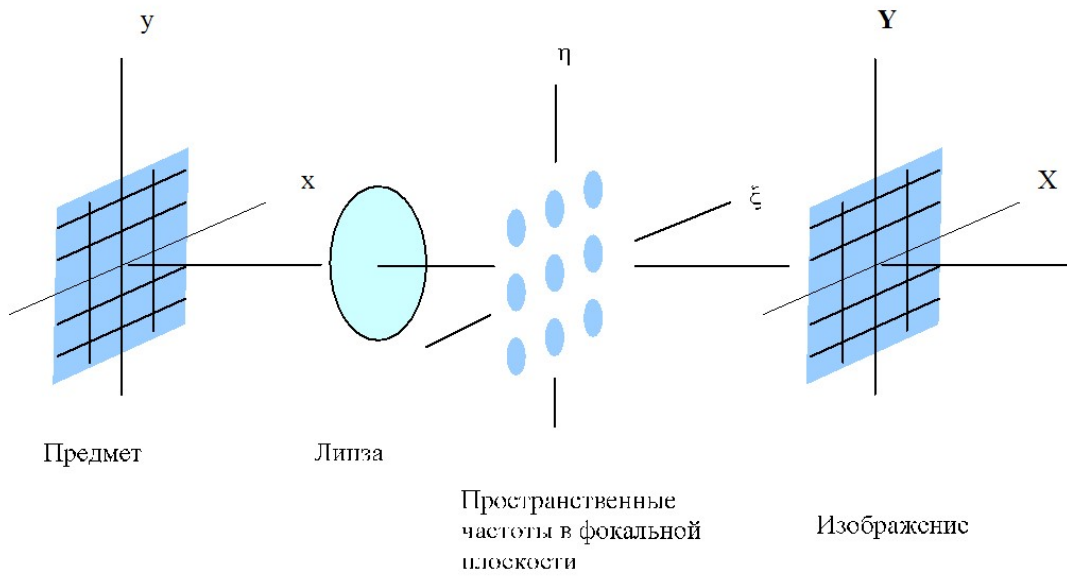
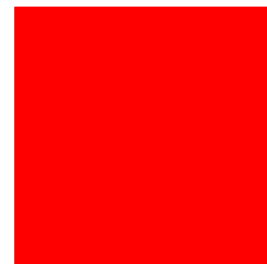
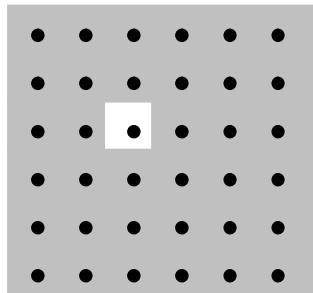
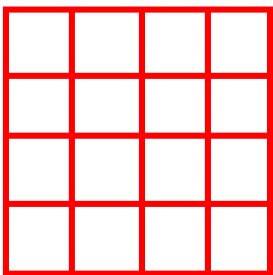
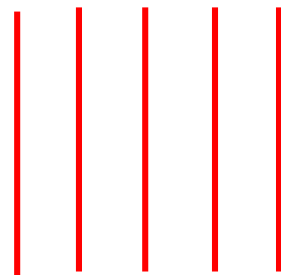
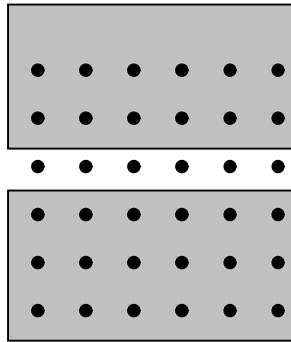
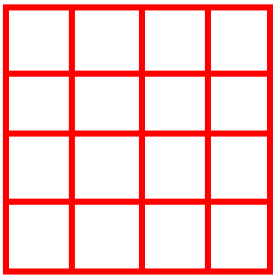
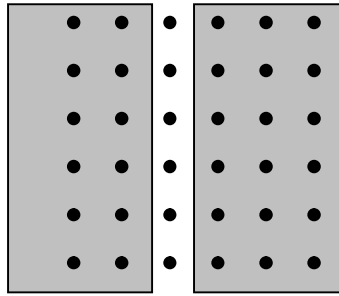
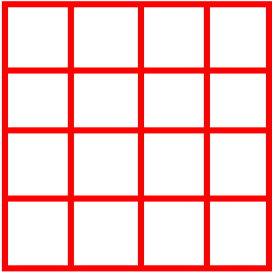
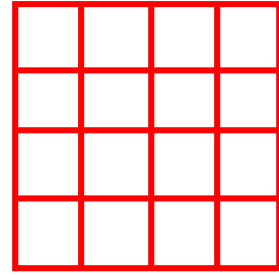
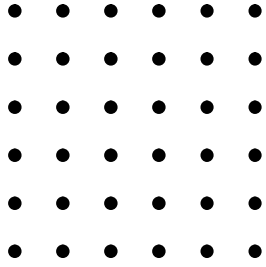
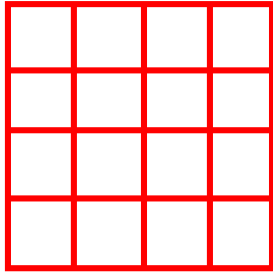


Рис.4 Пространственная фильтрация в фокальной плоскости линзы.



Объект

Фокальная

Плоскость изображения