<u>Лекция 1</u>

I. ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ТЕОРИИ СВЕТА.

Вопросы:
1. Уравнения Максвелла. Волны в вакууме. Волновое уравнение. Плоские монохроматические волны (скалярные и векторные). Свойства плоских волн: поперечность, связь между компонентами, поляризация. Представление плоской волны в комплексной форме. Сферические волны. Стоячие волны.
2. Поток энергии в плоской волне. Законы сохранения для световых волн. Интенсивность плоской гармонической волны. Гауссовы пучки. Эффективная интенсивность.

§1.1. Уравнения Максвелла.

Свет представляет собой электромагнитные волны, которые полностью описываются системой уравнений Максвелла.

$$rot\ \vec{\mathrm{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathrm{H}}}{\partial t}$$

$$rot\ \vec{\mathrm{H}} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j},$$

$$div\ \vec{D} = 4\pi\rho$$

$$div\ \vec{\mathrm{H}} = 0$$

где $\vec{H}$ -напряженность магнитного поля, $\vec{E}$ и $\vec{D}$-вектора напряженности и индукции электрического поля, c - скорость света в вакууме, ρ обьемная плотность заряда, $\vec{j}$ - плотность тока. Для описания взаимодействия излучения с веществом, необходимо ввести материальное уравнение, связывающее индукцию электрического поля в среде $\vec{D}$, с напряженностью электрического поля, падающей волны. Системой уравнений Максвелла описываются процессы излучения, распространения и взаимодействия света с веществом.

1. Волны в вакууме описываются условиями:

   $$\vec{D} = \vec{\mathrm{E}},\ \rho = 0,\ \vec{j} = 0.$$

   Уравнения Максвелла, полученные при этих условиях, описывают распространение света, на расстояниях меньше длины волны λ.
2. Процессы излучения волн характеризуются наличием движущихся зарядов, при этом необходимо, чтобы заряды двигались с ускорением,

как будет показано в последующих лекциях, то есть необходимо наличие в системе переменных токов $\vec{j} \neq 0$.

3. Взаимодействие излучения с веществом представляют собой следующие процессы: во-первых, это локальный отклик среды на воздействие и, во-вторых, переизлучение света частицами среды, в-третьих, интерференция полученных волн.

Локальный отклик среды определяется поляризацией вещества $\vec{P} = \vec{P}(\vec{\mathrm{E}})$, и построением материального уравнения $\vec{D} = \vec{\mathrm{E}} + 4\pi \vec{P}$.

Если интенсивность (и напряженности) электромагнитного поля не велика, тогда, мы находимся в рамках *линейной оптики*. В этом случае $\vec{P} = \chi \vec{\mathrm{E}}$ и диэлектрическая восприимчивость вещества χ не зависит от интенсивности света. Для *изотропных сред* χ не зависит от направления распространения и поляризации волны и является постоянной. Индукция и напряженность электрического поля связаны уравнением

$$\vec{D} = (1 + 4\pi\chi)\vec{\mathrm{E}};$$

при этом диэлектрическая проницаемость среды ε имеет вид

$$\varepsilon = (1 + 4\pi\chi)$$

В *анизотропных средах* диэлектрическая восприимчивость зависит от направления от направления распространения и поляризации волны и имеет тензорный характер. При этом

$D_i = \varepsilon_{ij}\mathrm{E}_i$ Среда может быть описана с помощью тензорной диэлектрической проницаемостью ε_{ij} и соответствующим ей показателем преломления

$$n_{ij} = \sqrt{\varepsilon_{ij}}.$$

Нелинейные оптические явления характеризуются зависимостью диэлектрической восприимчивости от интенсивности падающего света $\chi(\vec{\mathrm{E}})$, и соответствующей зависимостью поляризации вещества $\vec{P} = \chi(\vec{\mathrm{E}})\vec{\mathrm{E}}$.

В рамках уравнений Максвелла могут быть описаны, также процессы поглощения (или усиления) в активных средах. Для этого вводится, комплексная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ при этом действительная часть описывает законы преломления, а комплексная поглощение.

§1.2 Электромагнитные волны в вакууме.

1.2.1. Волновое уравнение в вакууме.

Для описания распространения света в вакууме полагаем:

$\rho = 0,\ \vec{j} = 0, \vec{D} = \vec{\mathrm{E}}$.

Система уравнений Максвелла в этом случае приобретает вид:

$$rot\,\vec{\mathrm{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathrm{H}}}{\partial t} \qquad (1)$$

$$rot\,\vec{\mathrm{H}} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathrm{E}}}{\partial t} \qquad (2)$$

$$div\,\vec{\mathrm{E}} = 0 \qquad (3)$$

$$div\,\vec{\mathrm{H}} = 0 \qquad (4)$$

Найдем $rotrot\,\vec{\mathrm{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial(rot\,\vec{\mathrm{H}})}{\partial t}$,

с учетом уравнения (2) получим

$$rotrot\,\vec{\mathrm{E}} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathrm{E}}{\partial t^2}$$

Используем соотношение $rotrot\,\vec{\mathrm{E}} = graddiv\,\vec{\mathrm{E}} - \nabla^2\,\vec{\mathrm{E}}$ и с учетом уравнения (3) получим волновое уравнение для $\vec{\mathrm{E}}$:

$$\boxed{\nabla^2\,\vec{\mathrm{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{\mathrm{E}}}{\partial t^2} = 0}$$

Аналогичное уравнение получается и для H, для этого необходимо найти $rotrot\mathrm{H}$ из уравнения (2)

$$\boxed{\nabla^2\,\vec{\mathrm{H}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\,\vec{\mathrm{H}}}{\partial t^2} = 0}$$

Так как вектора $\vec{\mathrm{E}}$ и $\vec{\mathrm{H}}$ можно разложить по компонентам

$$\vec{\mathrm{E}} = \vec{i}\,\mathrm{E}_x + \vec{j}\,\mathrm{E}_y + \vec{k}\,\mathrm{E}_z$$

$$\vec{\mathrm{H}} = \vec{i}\,\mathrm{H}_x + \vec{j}\,\mathrm{H}_y + \vec{k}\,\mathrm{H}_z,$$

то волновое уравнение для компонент примет вид

$$\nabla^2\mathrm{E}_i - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathrm{E}_i}{\partial t^2} = 0 \text{ и}$$

$$\nabla^2\mathrm{H}_i - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathrm{H}_i}{\partial t^2} = 0.$$

Иногда в этом случае говорят о скалярной волне. Рассмотрим скалярные волны, для этого вместо компонент векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ введена функция f

Решение волнового уравнения $f = f(z,t)$ имеет в вид плоской волны, распространяющейся вдоль оси z, волновой фронт которой представляет собой плоскость перпендикулярную направлению распространения :

Волновое уравнение для данной функции:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}}$$

Решение определяется функцией вида $f = f_1\left(t - \frac{z}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{z}{c}\right)$, это две бегущие волны, распространяющиеся в различных направлениях, в скобках записаны аргументы функций. Решение такого вида сохранят вид волны: это основное требование к волнам в вакууме. Проверим данное предположение. Найдем вид функции f_1, которая описывает волну бегущую «вперед» в момент времени $t_1 = t + \Delta t$, учтем, что волновой фронт перемещается на расстояние $\Delta z = c\Delta t$, тогда

$$f_1\left[(t+\Delta t) - \frac{z+\Delta z}{c}\right] = f_1\left(t - \frac{z}{c}\right).$$

Аналогичные рассуждения для функции f_2, которая описывает волну, бегущую «назад» дают равенство

$$f_2\left[(t+\Delta t) + \frac{z-\Delta z}{c}\right] = f_2\left(t + \frac{z}{c}\right).$$

Решение выражает фундаментальный факт конечности скорости распространения электромагнитной волны.

Волна приходит в точку с координатой Z, через $\Delta t = \frac{z}{c}$.

Обратите внимание, что в последующих курсах электродинамики все решения подобного вида носят название запаздывающих.

1.2.2. **Плоские волны. Связь между компонентами.**

Рассмотрим волну, распространяющуюся вдоль оси z вид, который описывается функциями

$$\vec{\mathrm{E}} = \vec{\mathrm{E}}(t,z)$$

$$\vec{\mathrm{H}} = \vec{\mathrm{H}}(t,z),$$

это волны, имеющие плоский волновой фронт, так как фаза зависит только от Z

Из уравнения (3), для плоских волн соотношение

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0; \quad .$$

Получим $\frac{\partial E_z}{\partial z}=0$ (z-я компонента вектора $\vec{E}$ не зависит от координаты z).

Рассмотрим первое уравнение Максвелла для z-ой компоненты

$$\frac{\partial E_z}{\partial t}=c[rot H]_z=-c\left(\frac{\partial H_x}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial x}\right)=0$$

Выполнив аналогичные преобразования для всех компонент векторв $\vec{E}$ и $\vec{H}$ получаем следующие уравнения:

$$\frac{\partial E_z}{\partial t}=0 \qquad \frac{\partial H_z}{\partial t}=0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t}=-c\frac{\partial H_y}{\partial z} \qquad \frac{\partial H_x}{\partial t}=c\frac{\partial E_y}{\partial z} \qquad (6)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t}=c\frac{\partial H_x}{\partial z} \qquad \frac{\partial H_y}{\partial t}=-c\frac{\partial E_x}{\partial z} \qquad (7)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z}=0 \qquad \frac{\partial H_z}{\partial z}=0 \qquad (8)$$

Уравнения показывают важнейшее свойство электромагнитных волн– их поперечность смотри 5 и 8.

Простейшей функцией, удовлетворяющей уравнениям Максвелла, является гармоническая волна

$$E_x(t,z)=A\cos\omega(t-z/c)=A\cos(\omega t-kz), \qquad (9)$$

где $k=\frac{\omega}{c}$, $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ - модуль волнового вектора $\vec{k}$,

$\nu=\frac{1}{T}=\frac{c}{\lambda}$-частота колебаний,

T-период колебаний,

$\omega=2\pi\nu$ - круговая частата.

Направление волнового вектора $\vec{k}$ совпадает с направлением распространения волнового фронта (поверхности одинаковой фазы). Распространение волнового фронта описывается уравнением

$\omega t-kz=const$.

Продифференцируем данное выражение по времени и найдем фазовую скорость:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k};\ V_{cp} = \frac{\omega}{k}$$

Проверим, удовлетворяет ли решение (9) волновому уравнению.

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E(t,z)}{\partial z^2} = -A\frac{\omega^2}{c^2}\cos\omega(t - \frac{z}{c})$$

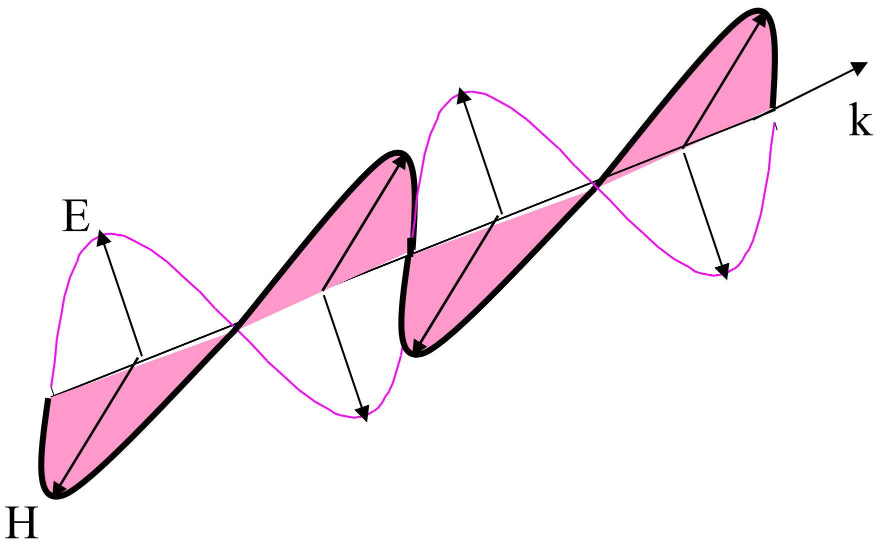
$$\frac{\partial^2 E(t,z)}{\partial t^2} = -A\frac{\omega^2}{c^2}\cos\omega(t - \frac{z}{c})$$

Функция (9) удовлетворяет волновому уравнению.

Найдем из уравнения Максвелла H.

$$E_x(t,z) = A\cos\omega(t - \frac{z}{c})$$

Воспользуемся уравнением Z.



$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -A\omega\sin\omega(t - \frac{z}{c})$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{A\omega}{c}\sin\omega(t - \frac{z}{c})$$

$$H_y = \frac{A\omega}{c}\int \sin\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)dz$$

$$H_y = A\cos\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)$$

Вектора $\vec{E}$ и $\vec{H}$ совершают в бегущей волне колебания в фазе, но в перпендикулярных плоскостях. (рисунок)

Если зафиксировать время t,то вдоль оси Z получим косинусоидальное-распределение напряженностей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ (мгновенная фотография).

Если зафиксировать точку Z, то уравнения описывают изменение $\vec{E}$ и $\vec{H}$ со временем.

В общем виде можно записать уравненение волны, не зависящее от системы координат.

$$kz = \vec{k}\,\vec{r}$$

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{A}\cos(\omega t - \vec{k}\,\vec{r}),$$

здесь $\vec{r}$ радиус вектор, проведенный из начала координат в точку наблюдения.

Волновому уравнению удовлетворяют также волны

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{A}\sin(\omega t - \vec{k}\,\vec{r})$$

и волны, распространяющиеся в противоположном направлении.