Лекция 2

1.2.3. **Поляризация плоских электромагнитных волн**.

Решением волнового уравнения и системы уравнений Максвелла также являются суперпозиции частных решений.

Рассмотрим суперпозицию волн поляризованных в двух взаимно перпендикулярных плоскостях

$$\mathrm{E}_x(t,z) = A_1\cos[\omega t - \varphi_1(z)],$$

$$\mathrm{E}_y(t,z) = A_2\cos[\omega t - \varphi_2(z)],$$

напряженность результирующей волны можно найти по формуле

$$\mathrm{E}^2 = \mathrm{E}_x^2 + \mathrm{E}_y^2$$

В общем случае конец вектора $\vec{\mathrm{E}}$ описывает эллипс. Для нахождения траектории движения, конца вектора $\vec{\mathrm{E}}$ нужно исключить время t.

$$\omega t - \varphi_1(z) = \arccos\frac{\mathrm{E}_x}{A_1}$$

$$\omega t - \varphi_1(z) = \arccos\frac{\mathrm{E}_x}{A_1}$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \arccos\frac{\mathrm{E}_y}{A_2} - \arccos\frac{\mathrm{E}_x}{A_1}$$

Найдем: $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \cos(\arccos\frac{\mathrm{E}_y}{A_2} - \arccos\frac{\mathrm{E}_x}{A_1})$

Воспользуемся формулой:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta + \sqrt{1-\cos^2\alpha}\sqrt{1-\cos^2\beta}$$

Получаем:

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\mathrm{E}_y}{A_2}\frac{\mathrm{E}_x}{A_1} + \sqrt{\left[1-\left(\frac{\mathrm{E}_x}{A_1}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\mathrm{E}_y}{A_2}\right)^2\right]}$$

$$\left[-\frac{\mathrm{E}_x}{A_1}\frac{\mathrm{E}_y}{A_2} + \cos(\varphi_2-\varphi_1)\right]^2 = \left(1-\left(\frac{\mathrm{E}_y}{A_2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{E}_x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{E}_x}{A_1}\frac{\mathrm{E}_y}{A_2}\right)^2\right)$$

$$\left(\frac{\mathrm{E}_x}{A_1}\frac{\mathrm{E}_y}{A_2}\right)^2 - 2\frac{\mathrm{E}_x}{A_1}\frac{\mathrm{E}_y}{A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1) + \cos^2(\varphi_2-\varphi_1) = 1-\left(\frac{\mathrm{E}_y}{A_2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{E}_x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{E}_x}{A_1}\frac{\mathrm{E}_y}{A_2}\right)^2$$

$$\boxed{\left(\frac{E_x}{A_1}\right)^2+\left(\frac{E_y}{A_2}\right)^2-2\frac{E_x}{A_1}\frac{E_y}{A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)}$$

Конец вектора $\vec{E}$ описывает эллипс, такая поляризация называется эллиптической.
Рассмотрим следующий случай:

1. $\varphi_2-\varphi_1=2\pi m$, где $m=1, 2, 3\ldots$(рисунок)

Уравнения преобразуются к следующему виду :

$$\left(\frac{E_x}{A_1}\right)^2+\left(\frac{E_y}{A_2}\right)^2-2\frac{E_x}{A_1}\frac{E_y}{A_2}=0$$

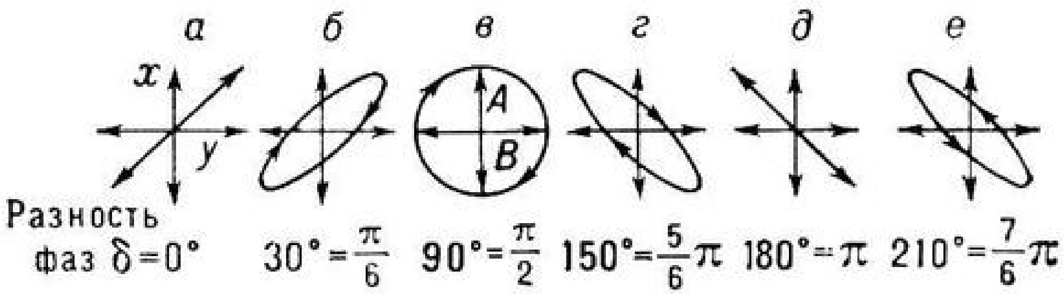
$\frac{E_x}{A_1}=\frac{E_y}{A_2}$ уравнение прямой, лежащей в 1-3 квадранте координатной плоскости.

Компоненты E_x и E_y колеблются синфазно и их результирующее колебание, происходит по прямой.

2. $\varphi_2-\varphi_1=\pi m$,где m=1, 3… (рисунок)

$$\left(\frac{E_x}{A_1}+\frac{E_y}{A_2}\right)^2=0;\ \frac{E_x}{A_1}=-\frac{E_y}{A_2}.$$

Прямая находится в 2-ом и 4-ом квадранте координатной плоскости. Компоненты



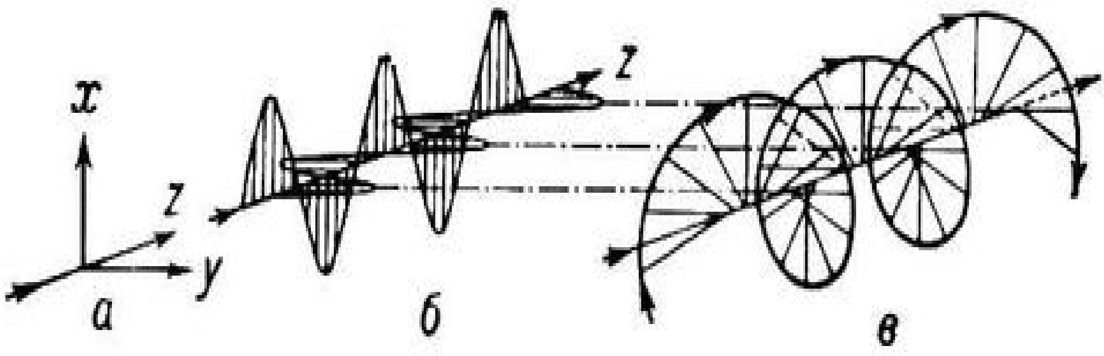
E_x и E_y совершают колебания в противофазе.

3. $\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}-2\pi m$,где m=1, 2, 3…

$\left(\frac{E_x}{A_1}\right)^2+\left(\frac{E_y}{A_2}\right)^2=1$,если амплитуды $A_1\neq A_2$, то в этом случае вектор $\vec{E}$ описывает эллипс, ориентированный по осям X и Y, а в случае $A_1=A_2=A$

$$E_x^2+E_y^2=A^2$$

получаем круговую поляризацию.

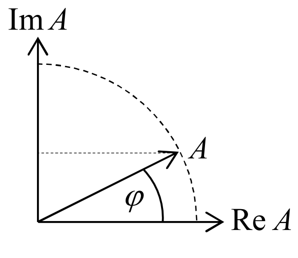


В случае эллиптической и круговой поляризации волна представляет спираль, летящую со скоростью света, не вращаясь.
В этом случае $\delta = \varphi_{02} - \varphi_{01} = \varphi_2(z) - \varphi_1(z)$ разность фаз определяется начальным сдвигом фаз.

Примечание:
$\varphi_1(z) = kz + \varphi_{01}$
$\varphi_2(z) = kz + \varphi_{02}$
В общем случае $\delta = \varphi_2(z) - \varphi_1(z)$ разность фаз, которая определяется разностью хода волн поляризованных по осям X и Y
$\frac{2\pi}{\lambda}\Delta = \delta$,где Δ-разность хода.
Например, волны могут двигаться с разными скоростями, как это бывает в анизотропных средах.
$E_i = A_i \cos(\omega t - kz)$ или
$E_i = A_i \cos(\omega t - \frac{z}{V_i})$; $\frac{z}{V_i} = \frac{zn_i}{c}$
$\Delta = zn_x - zn_y = z(n_x - n_y)$

1.2.4. КОМПЛЕСКСНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ.

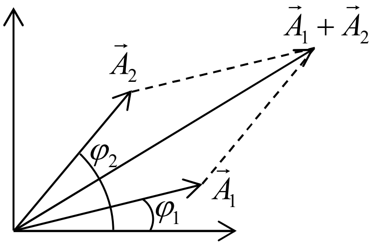
Так как функции $\sin(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ и $\cos(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ удовлетворяют волновому уравнению, то решениями являются также и суперпозиции этих функций. Наиболее часто используемой суперпозицией является комплексная функция



$$A \cdot e^{-i\cdot(\omega\cdot t - \vec{k}\cdot\vec{r})} = A\left[\cos(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r}) - i \cdot \sin(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r})\right]$$

$\vec{k} \cdot \vec{r} = \varphi$, тогда можно представить волну в виде
$A \cdot e^{i\cdot\varphi} \cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t}$, где $A \cdot e^{i\cdot\varphi}$ – комплексная амплитуда.

Можно ввести графическое представление волн, при котором комплексная амплитуда $A \cdot e^{i\cdot\varphi}$ представляется в виде вектора, модуль которого равен A, а фаза φ задает направление данного вектора. $tg\varphi = \dfrac{\operatorname{Im} A}{\operatorname{Re} A}$



В этом случае сложение амплитуд может быть выполнено по правилам сложения векторов.

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Рассмотрим соотношение между компонентами в уравнениях Максвелла для комплексной формы записи.

Записав уравнения плоской волны в комплексной форме

$$\vec{E} = \vec{A} \cdot e^{-i\cdot(\omega\cdot t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

$$\vec{H} = \vec{A} \cdot e^{-i\cdot(\omega\cdot t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

$$rot\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \cdot \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \cdot \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right).$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \cdot e^{i\cdot\vec{k}\cdot\vec{r}} = \vec{k} \cdot e^{i\cdot\vec{k}\cdot\vec{r}} \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial y} = i \cdot \vec{k} \cdot e^{i\cdot\vec{k}\cdot\vec{r}} \cdot \frac{\partial(\vec{i}\cdot x + \vec{j}\cdot y + \vec{k}\cdot z)}{\partial y} =$$

$$= i \cdot (\vec{k} \cdot \vec{j}) \cdot e^{i\cdot\vec{k}\cdot\vec{r}} = i \cdot k_y \cdot e^{i\cdot\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$rot\vec{E} = i \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ k_x & k_y & k_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = i \cdot \left[\vec{k} \cdot \vec{E}\right]$$

$$\boxed{\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -i \cdot \omega \cdot \vec{E}} \quad ,$$

т.е. в комплексной форме для уравнений Максвелла действие оператора $\nabla \to i \cdot \vec{k}$ сводится к умножению на $\vec{k}$, а дифференциал по t – к умножению на $-i \cdot \omega$.

Система уравнений Максвелла примет вид:

$$\left[\vec{k}\cdot\vec{E}\right]=\frac{\omega}{c}\cdot\vec{H} \qquad (1');$$

$$\left[\vec{k}\cdot\vec{H}\right]=-\frac{\omega}{c}\cdot\vec{E} \qquad (2');$$

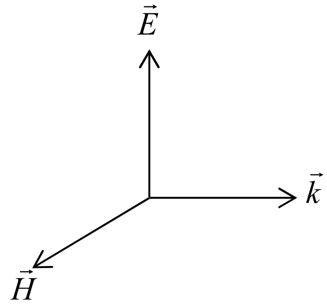
$$\left(\vec{k}\cdot\vec{E}\right)=0 \qquad (3');$$

$$\left(\vec{k}\cdot\vec{H}\right)=0 \qquad (4').$$

Эти соотношения наглядно показывает поперечность электромагнитных волн:

- из уравнения ($1^{/}$) – $\vec{H}\perp\vec{k}$ *и* $\vec{E}$;
- из ($2^{/}$) – $\vec{E}\perp\vec{k}$ и $\vec{H}$;
- из ($3^{/}$) – $\vec{k}\perp\vec{E}$;
- из ($4^{/}$) – $\vec{k}\perp\vec{H}$,

следовательно $\vec{k}\perp\vec{E}\perp\vec{H}$.



1.2.5. Сферические волны .

Решением волнового уравнения, кроме плоских волн, являются также сферические волны. Сферические волны распространяются от точечных источников.

В сферической системе координат оператор Лапласа:

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r^2}\cdot\left(r\cdot\Phi\right)+\frac{1}{r^2\cdot\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\cdot\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2},$$

если имеется точечный <u>изотропный</u> источник, то $\Phi=\Phi(r,t)$. Тогда волновое уравнение будет иметь вид

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r^2}\cdot\left(r\cdot\Phi\right)-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0.$$

Умножив уравнение на r, получим

$$\frac{\partial^2\left(r\cdot\Phi\right)}{\partial r^2}-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\left(\Phi\cdot r\right)}{\partial t^2}=0.$$

Введя обозначение $r\cdot\Phi=f$, получим уже знакомое нам уравнение, в котором $z\to r$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad ,$$

его решение представимо в виде волны, распространяющейся в направлении r:

$$f = f_{1.}\cdot\left(t - \frac{r}{c}\right) + f_2\cdot\left(t + \frac{r}{c}\right),$$

тогда

$$\Phi = \frac{f_1\cdot\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} + \frac{f_2\cdot\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}.$$

Первая функция описывает сферическую расходящуюся волну, вторая – сходящуюся волну.

Для гармонических сферических волн

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{A_1\cdot\cos\left[\omega\cdot\left(t - {}^{r}\!/_{c}\right)\right]}{r}; \\ \Phi_1 &= \frac{A_1}{r}\cdot\exp\left[-i\cdot\omega\cdot\left(t - {}^{r}\!/_{c}\right)\right]; \end{aligned}\right\} \quad \textit{расходящаяся волна}$$

$$\left.\begin{aligned} \Phi_2 &= \frac{A_1\cdot\cos\left[\omega\cdot\left(t + {}^{r}\!/_{c}\right)\right]}{r}; \\ \Phi_2 &= \frac{A_1}{r}\cdot\exp\left[-i\cdot\omega\cdot\left(t + {}^{r}\!/_{c}\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad \textit{сходящаяся волна}$$

Часто в оптике применяются источники в виде длинных щелей и нитей. В этом случае испускаются цилиндрические волны, описание которых в плоскости d нити совпадает с описанием сферической волны.

Волны, распространяющиеся от реальных источников, всегда можно описать суперпозицией известных решений волнового уравнения.