Дифракция на периодических структурах

$T(x)=T(x+l\,d)$ или

$A(x)=A(x+l\,d)$, где $l=1,2,3\ldots$

1. Дифракция на синусоидальной решетке.

Рассмотрим решетку, пропускание которой описывается функцией $T(x)=t_1+t_2\cos\frac{2\pi}{d}x$, $A(x)=A_0(t_1+t_2\cos\frac{2\pi}{d}x)$, где $k=\frac{2\pi}{d}$ - пространственная частота.

При дифракции на такой решетке Фурье амплитуда задаётся:

$$A(k_x)=A_0\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}}(t_1+t_2\cos\frac{2\pi}{d}x)e^{-ik_x x}dx$$,где s- длина решетки.

$$\cos kx=\cos\frac{2\pi}{d}x=\frac{e^{i\frac{2\pi}{d}x}+e^{-i\frac{2\pi}{d}x}}{2}$$,тогда

$$A(k_x)=A_0\left\{t_1\left[\frac{e^{-ik_x\frac{s}{2}}-e^{ik_x\frac{s}{2}}}{-ik_x}\right]+\frac{t_2}{2}\left[\frac{e^{i(k-k_x)\frac{s}{2}}-e^{-i(k-k_x)\frac{s}{2}}}{i(k-k_x)}\right]+\frac{t_2}{2}\left[\frac{e^{-i(k+k_x)\frac{s}{2}}-e^{i(k+k_x)\frac{s}{2}}}{-i(k+k_x)}\right]\right\}$$

$$A(k_x)=A_0 st_1\frac{\sin k_x\frac{s}{2}}{k_x\frac{s}{2}}+A_0 s\frac{t_2}{2}\frac{\sin(k-k_x)\frac{s}{2}}{(k-k_x)\frac{s}{2}}+A_0 s\frac{t_2}{2}\frac{\sin(k+k_x)\frac{s}{2}}{(k+k_x)\frac{s}{2}},\quad \text{где}\quad k_x=\frac{2\pi}{\lambda}\sin\varphi$$

$k=\frac{2\pi}{d}$

Max в следующих точках:

$\sin\varphi=0$

$\sin\varphi=\frac{\lambda}{d}$

$\sin\varphi=-\frac{\lambda}{d}$

A min в когда $k_x\frac{s}{2}=\pi m\lambda$ (рисунок графика)

$k_x\frac{s}{2}=2\pi m\frac{\lambda}{s}$

$\sin\varphi=m\frac{\lambda}{s}$

$\sin\varphi=\frac{\lambda}{d}\pm m\frac{\lambda}{s}$

$\sin\varphi=-\frac{\lambda}{d}\pm m\frac{\lambda}{s}$

Если $s \to \infty$, то $\frac{\sin\alpha}{\alpha} \to \delta(\alpha)$. В этом случае $A(k_x) = A_0\delta(k_x) + A_1\delta(k - k_x) + A_1\delta(k + k_x)$

Рассмотрим периодическую одномерную структуру, описываемую коэффициентом пропускания $T(x) = T(x + dm)$, тогда периодическая функция может быть разложена в ряд Фурье.

$$T(x) = t_0 + \sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_m \cos k_m x + \sum_{-\infty}^{\infty}\beta_m \sin k_m x \text{ ,где } k_m = \frac{2\pi}{d}m$$

Тогда можно рассмотреть дифракцию на каждой синусоидальных решетках, условие максимума будет иметь вид $k - k_x = 0$

$\boxed{d\sin\varphi = m\lambda}$ т. к. $k_m = \frac{2\pi}{d}m$.

А распределение амплитуд будет иметь вид $A(k_x) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_m\delta(k_m - k)$.

<u>Дифракция на амплитудной решетке</u>.

Для случая прямоугольной (одномерной) амплитудной решетки функция пропускания имеет вид (см. рис.3.8):

$$T(x) = \begin{cases} 1 & dl - \frac{b}{2} < x < dl - \frac{b}{2} \\ 0 & \text{при остальных значениях } x \end{cases}$$

Из рис. 3.8 видно, что функция пропускания решетки характеризуется тремя пространственными масштабами: шириной щели *b*, периодом d и полным размером $D = Nd$. При интегрировании функции пропускания *l*-ого штриха можно заметить, что фаза плоской волны $ik_x(x - ld)$ состоит из двух слагаемых: первое меняется непрерывно на ширине штриха, второе – дискретно, с шагом d, при переходе от одного штриха к другому.

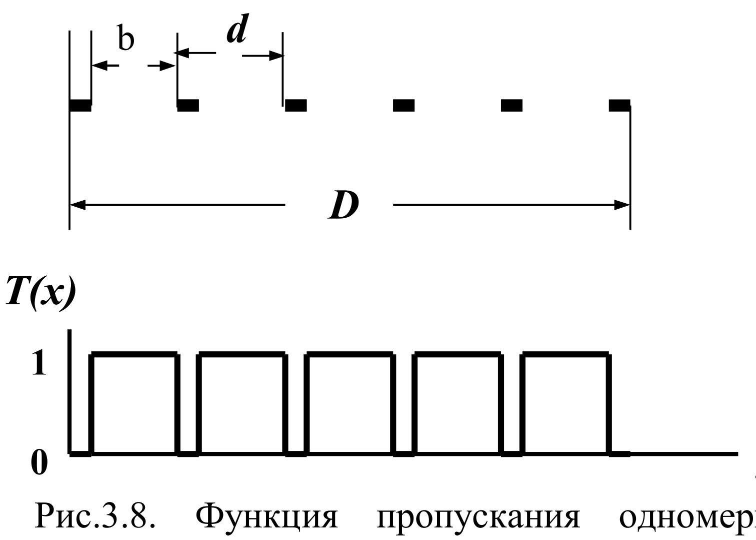

Рис.3.8. Функция пропускания одномерной дифракционной решетки

Найдем угловое распределение амплитуд (спектр пространственных частот)

$$A(k_x) = A_0 \sum_{l=1}^{N} \int_{dl-\frac{b}{2}}^{dl+\frac{b}{2}} e^{-ik_x x} d x = A_0 \sum_{l=1}^{N} e^{-ik_x dl} \frac{e^{-ik_x \frac{b}{2}} - e^{ik_x \frac{b}{2} l}}{-ik_x} = A_0 b \frac{\sin k_x \frac{b}{2}}{k_x \frac{b}{2}} \sum_{l=1}^{N} e^{-ik_x dl}$$

Сумма ряда геометрической прогрессии:

$$\sum_{l=1}^{N} A_0 e^{-(ik_x ld)} = A_0 \frac{1 - e^{-(iNk_x d)}}{1 - e^{-(ik_x d)}} = A_0 e^{-(i\frac{N-1}{2} k_x d)} \frac{\sin(Nk_x d/2)}{\sin(k_x d/2)}$$

$e^{-(i\frac{N-1}{2} k_x d)}$ - фазовый множитель, соответствующий волне, распространяющейся от центральной части решетки.

Перейдем к интенсивности:

$$I = I_0 \left(\frac{\sin (k_x b/2)}{(k_x b/2)} \right)^2 \left(\frac{\sin(Nk_x d/2)}{\sin(k_x d/2)} \right)^2 \qquad (1)$$

Здесь I_0 - интенсивность света, падающего на <u>одну щель</u>,

$$\left(\frac{\sin (k_x b/2)}{(k_x b/2)} \right)^2 \qquad (2)$$

-распределение интенсивности в результате дифракции на щели,

$$\left(\frac{\sin(Nk_x d/2)}{\sin(k_x d/2)} \right)^2 \qquad (3)$$

- распределение интенсивности в результате интерференции от N когерентных источников.

Напомним, что $k_x \frac{b}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{b}{2} \sin\varphi$ $\qquad$ $k_x \frac{d}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{2} \sin\varphi$

Найдем условия максимумов и минимумов для дифракции на амплитудной решетке.

Интерференционные (главные) максимумы определяются равенством 0 числителя и знаменателя в выражении (2), заметим, что равенство 0 знаменателя, автоматически ведет к равенству 0 числителя, следовательно, условие максимума:

$d \sin\varphi = m\lambda$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3....$

Интерференционные минимумы определяются равенством 0 только числителя при не равном 0 знаменателе в выражении (2). Условия минимума:

$d \sin\varphi = (m + n/N)\lambda$, где $n = 1,2,....,(N-1)$, то есть между главными максимумами наблюдается $(N-1)$-минимум.

Дифракционные минимумы определяются условием $b \sin\varphi = k\lambda$, где $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3....$

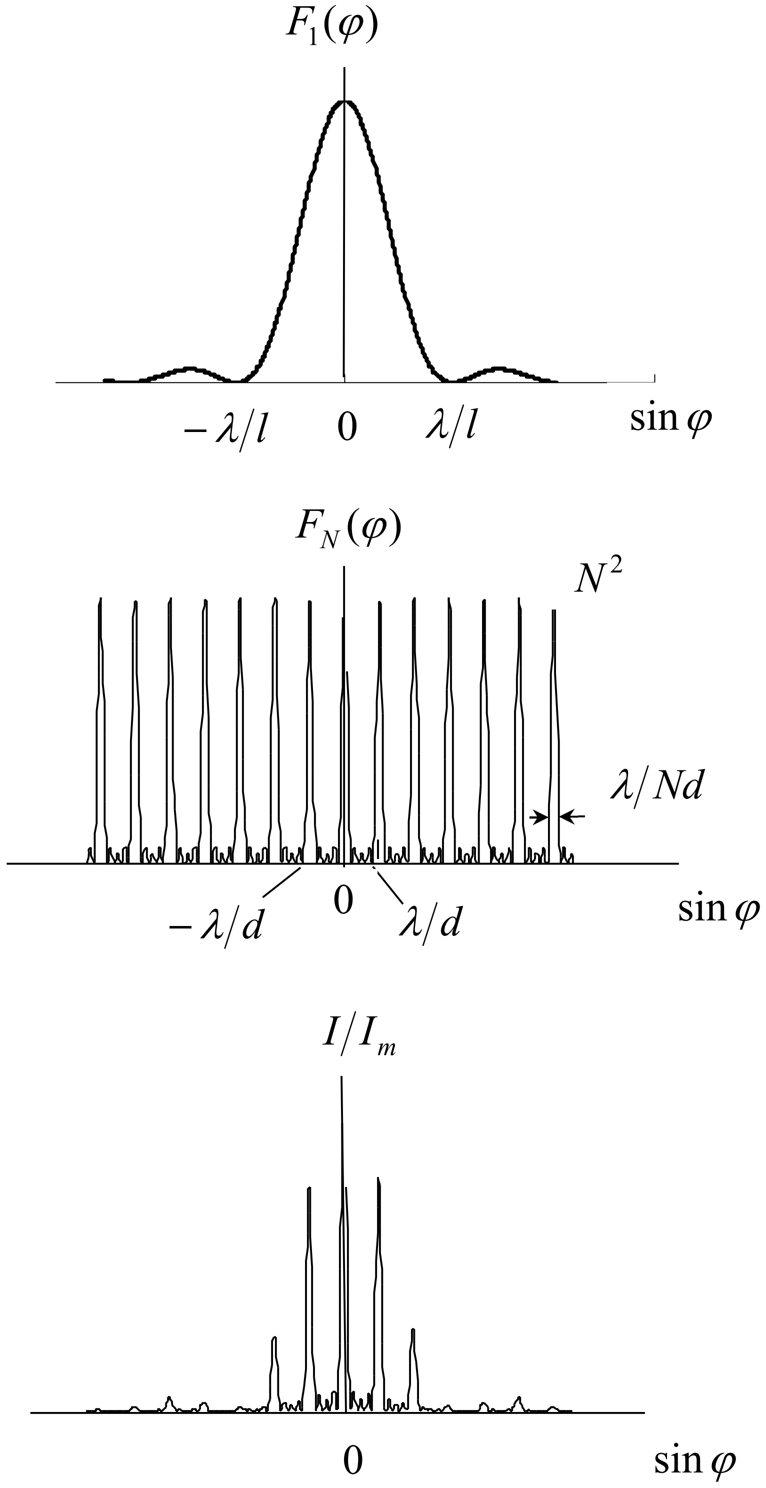

Рис. 3.9. Распределение интенсивности при дифракции на одномерной амплитудной решетке

Дифракция на двумерных структурах. Двумерная периодическая структура ("двумерная решетка") может быть получена путем наложения двух скрещенных дифракционных решеток. Найти условия максимумов при дифракции света на двумерной решетке, полученной при наложении двух решеток с периодами d_1 и d_2 в дальней зоне. Штрихи решеток перпендикулярны друг другу. Свет падает нормально на плоскость решетки.

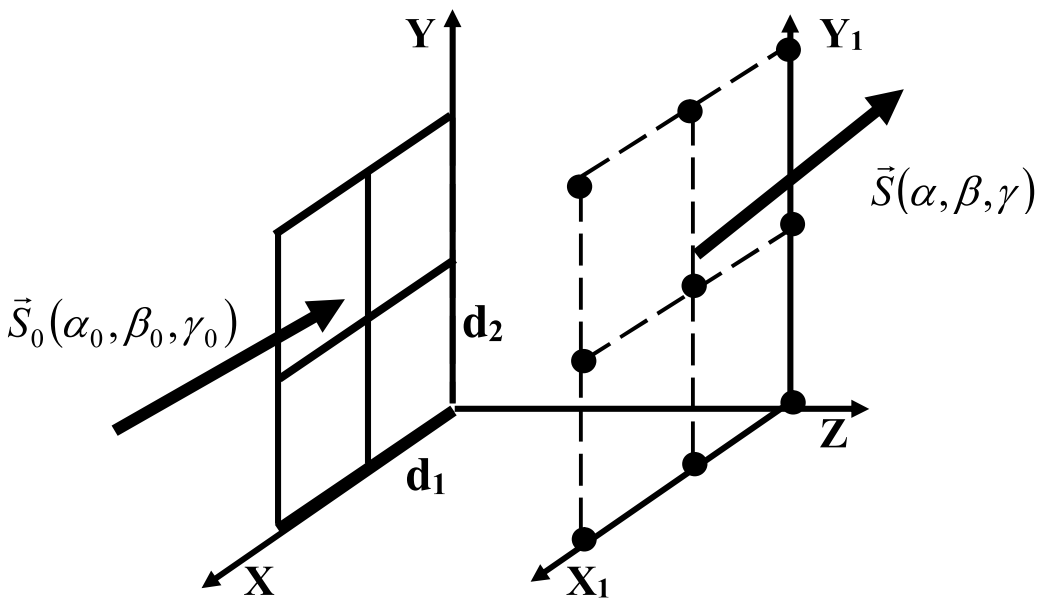

Рис. К описанию дифракции света на двумерной решетке.

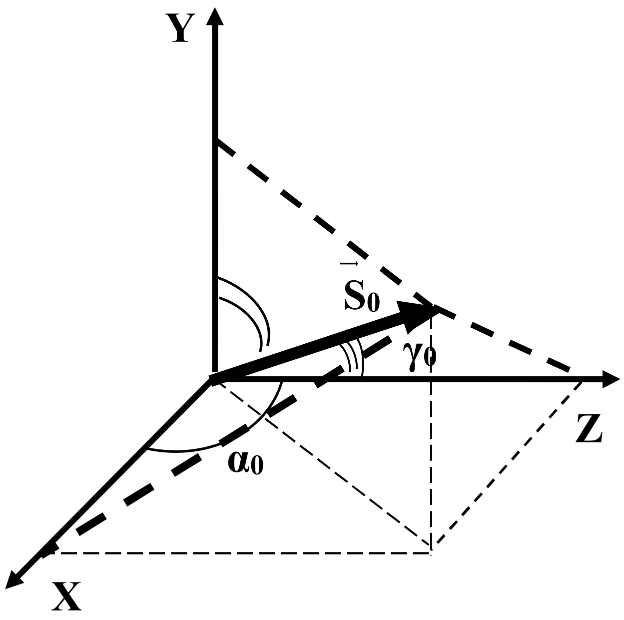

Рис. Угловые координаты $\boldsymbol{\alpha_0}$, $\boldsymbol{\beta_0}$, $\boldsymbol{\gamma_0}$ для волны, падающей на решетку. $\mathbf{S_0}$ – единичный вектор, определяющий направление падения.

При описании дифракции на двумерных и трехмерных структурах принято переходить к угловым координатам, в качестве которых выступают направляющие углы $(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0)$ для плоскости падения (X, Y) и (α,β,γ) для точки наблюдения в плоскости (X_1,Y_1). Введем также единичные вектора $\vec{S}_0=\vec{k}_0/|\vec{k}_0|$ для плоскости падения и $\vec{S}=\vec{k}/|\vec{k}|$ для точки наблюдения дифракционной картины (рис.). Данные вектора совпадают по направлению с соответствующими волновыми векторами $\vec{k}_0$ и $\vec{k}$. При нормальном падении: $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2}\ \ \beta_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Максимумы дифракции наблюдаются при одновременном выполнении условий, третье уравнение является свойством косинусов направляющих углов.

$$\begin{cases} d_1 \cos\alpha = m_1\lambda \\ d_2 \cos\beta = m_2\lambda \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \end{cases}$$

Поэтому картина дифракции в дальней зоне представляет собой набор ярких точек. В данном случае мы получили в плоскости наблюдения Фурье образ двумерной дифракционной решетки.

Дифракция на трехмерных структурах. Дифракция наблюдается также на

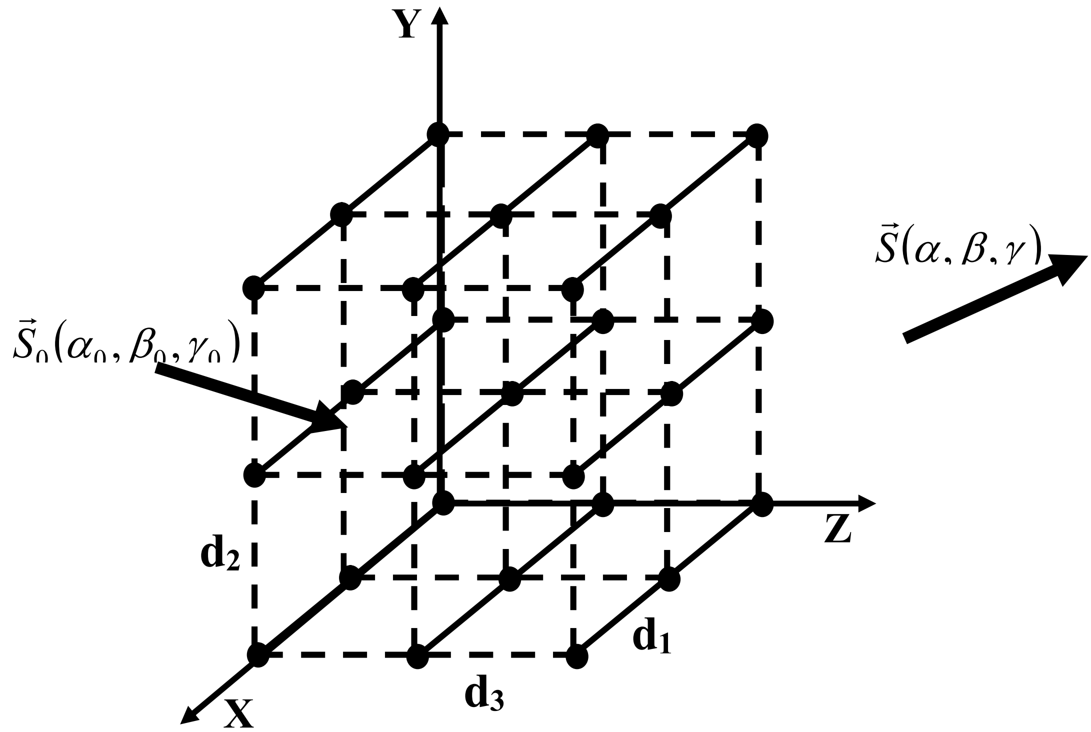

Рис. К описанию дифракции на трехмерной периодической структуре: $\vec{S}_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ и $\vec{S}(\alpha, \beta, \gamma)$ единичный вектора, определяющие направления падающей и дифрагировавшей волн соответственно.

трехмерных структурах, т. е. пространственных образованиях, обнаруживающих периодичность по трем не лежащим в одной плоскости направлениям. Найти условия образования максимумов при дифракции на трехмерной структуре, показанной на рисунке.

Рассмотрим нормальное падение волны на такую решетку. Максимумы интенсивности появляются при одновременном выполнении условий

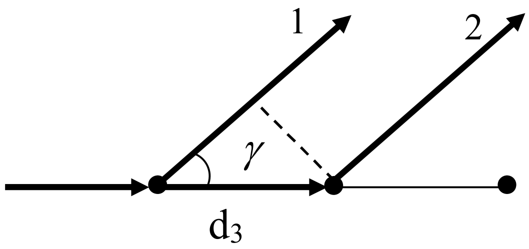

Рис. К определению разности хода волн 1 и 2.

$$\begin{cases} d_1 \cos\alpha = m_1\lambda \\ d_2 \cos\beta = m_2\lambda \\ d_3 - d_3\cos\gamma = m_3\lambda \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \end{cases}$$

В третьем равнении учтено, что дифракция происходит на слоях, разделенных промежутком d_3 и разность хода $\Delta_{12} = d_3 - d_3\cos\gamma$ (рис.)

Очевидно, что информацию о структуре решетки мы можем получить только при условии $d > \lambda$, при меньших периодах решетки невозможно получить даже первый дифракционный максимум. Система уравнений Лауэ является избыточной в данном случае. При этом длина волны λ становится четвертым параметром, и данная система уравнений выполняется только для определенных длин волн. Заметим, что при дифракции на объемной решетке требование к монохроматичности излучения снимается. Это широко используется, например, при восстановлении в белом свете голограмм, представляющих собой объемные решетки. Из всего спектра выбирается та волна, для которой выполняются условия Лауэ.

Подобными трехмерными структурами являются все кристаллические тела. Однако период их $d \approx 10^{-7}\,м$ слишком мал для того, чтобы можно было наблюдать дифракцию в видимом свете. Условие $d > \lambda$, выполняется в случае кристаллов лишь для рентгеновских лучей. Впервые дифракция рентгеновских лучей от кристаллов наблюдалась в 1913 г. в опыте Лауэ. Полученная система уравнений называется уравнениями Лауэ. Картина распределения максимумов, и в этом случае является Фурье образом объемной решетки и позволяет, выполнив обратное Фурье преобразование расшифровать структуру решетки. Данное явление является основой рентгеноструктурного анализа.

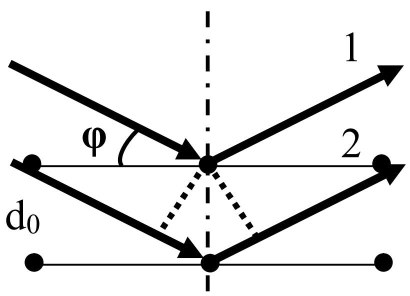

Рис. Схема Брэггов

Русский ученый Ю. В. Вульф и английские физики У. Г. и У. Л. Брэгги показали независимо друг от друга, что расчет дифракционной картины от кристаллической решетки можно провести также следующим простым способом.**Проведем через узлы кристаллической решетки параллельные равноотстоящие плоскости, они называются атомными слоями. Рассмотрим отражение рентгеновских лучей от двух соседних плоскостей (рис.). Волны 1 и 2 являются когерентными и будут интерферировать между собой. Разность хода $\Delta_{12} = 2d_0 \sin\varphi$, условие максимума будет иметь вид $2d_0 \sin\varphi = m\lambda$.**