*Лекция **3***

1.2.6. Энергетические характеристики.
Законы сохранения энергии для световых волн.

Электромагнитное поле характеризуется объемной плотностью энергии:

$$w = \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi}$$

Рассмотрим электромагнитную волну с напряженностями электрического и магнитного полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ соответственно.
Запишем уравнения Максвелла:

$$\begin{cases} rot\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ rot\vec{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Умножим скалярно первое уравнение на $\vec{H}$, второе на $\vec{E}$ и вычтем одно из другого:

$$\vec{H}rot\vec{E} - \vec{E}rot\vec{H} = -\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{H}^2 + \vec{E}^2)$$

используя соотношение $div\left[\vec{a} \times \vec{b}\right] = \vec{b}rot\vec{a} - \vec{a}rot\vec{b}$, получим:

$$div\left[\vec{E} \times \vec{H}\right] = -\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{H}^2 + \vec{E}^2)$$

или

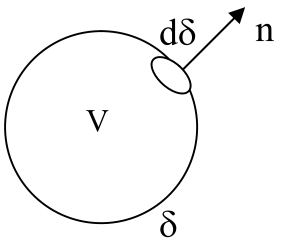
$$div\left[\vec{E} \times \vec{H}\right] = -\frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}w$$

Введем вектор $\vec{S} = \dfrac{c}{4\pi}\left[\vec{E} \times \vec{H}\right]$

Тогда $\boxed{\dfrac{\partial}{\partial t}w = -div\vec{S}}$

Проинтегрируем полученное выражение по объему V :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V wdV = -\int\limits_V div\vec{S}dV$$



Согласно теореме Остроградского-Гаусса:

$$\int\limits_{v} div\vec{S}dV = \oint\limits_{\sigma}(\vec{S}\cdot\vec{n})d\delta$$

Так как $\int\limits_V wdV = W$ - энергия электромагнитного поля в объеме V, то закон сохранения энергии имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}W = \frac{c}{4\pi}\oint\limits_{\delta}(\vec{S}\cdot\vec{n})d\delta$$

Вектор $\vec{S}$ носит название вектора Умова – Пойтинга и определяет плотность потока энергии переносимой в направлении нормали к площадке. (Энергия переносимая в единицу времени, через ед. площадки по направлении нормали)

В изотропных средах направление $\vec{S}$ и $\vec{k}$ совпадают, т.е. волновой вектор направлен по направлению распространения потока энергии.

Направление “луча” определяется направлением вектора распространения энергии т.е. вектором $\vec{S}$.

Примечание:

В анизотропных средах уравнения Максвелла имеют вид:

$$\begin{cases}[\vec{k}\times\vec{E}] = \dfrac{\omega}{c}\vec{H} \\ [\vec{k}\times\vec{H}] = -\dfrac{\omega}{c}\vec{E} \\ (\vec{k}\cdot\vec{D}) = 0 \\ (\vec{k}\cdot\vec{H}) = 0\end{cases}$$

так как векторы $\vec{D}$ и $\vec{E}$ не совпадают в этом случае по направлению, то направление вектора $\vec{k}$ показывает направление распространения фаз, а не энергий.

Для характеристики световых волн вводится понятие интенсивности, $I = < S(t,r) >$ которое определяется средним по времени значением модуля вектора Умова-Пойтинга. Частота оптических колебаний $\omega = 10^{14}\,Гц$. Время наблюдения оптических явлений на несколько порядков превышает период колебаний $T_н >> \dfrac{1}{\omega}$.

Найдем интенсивность плоской волны:

$$E_x = H_y = A\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

$$S(t,\vec{r}) = \frac{c}{4\pi}A^2\cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r}) = \frac{c}{8\pi}A^2 + \frac{c}{8\pi}A^2\cos 2(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

$$I = \frac{c}{8\pi}A^2$$

Если напряженности записаны в комплексной форме, то $A^2 = E\cdot E^*$, тогда

$$I = \frac{c}{8\pi} < E\cdot E^* >$$

Примечание: при работе с комплексной формой следует учесть, что если A и B комплексные числа, то $\operatorname{Re}A\cdot\operatorname{Re}B \neq \operatorname{Re}(AB)$.

Рассмотрим более подробно, т.к. переход от комплексной формы к реальной, нам потребуется в дальнейшем.

Пусть $\begin{array}{l} A(r,t) = A_0(r)e^{-i\omega t} \\ B(r,t) = B_0(r)e^{-i\omega t} \end{array}$

В этом случае $\begin{array}{l} \operatorname{Re}A = \dfrac{A(r,t) + A^*(r,t)}{2} \\ \operatorname{Re}B = \dfrac{B(r,t) + B^*(r,t)}{2} \end{array}$ (по формуле Эйлера)

$$\operatorname{Re}A\cdot\operatorname{Re}B = \frac{A_0(r)e^{-i\omega t} + A_0^*(r,t)}{2}\cdot\frac{B_0(r)e^{-i\omega t} + B_0{}^*(r)e^{i\omega t}}{2} =$$

$$\frac{A_0(r)B_0(r)e^{=2i\omega t} + A_0{}^*(r)B_0(r) + A_0(r)B_0^*(r) + A_0^*B_0^*e^{2i\omega t}}{4} =$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{Re}(A_0B_0^* + A_0B_0e^{-2i\omega t})$$

В результате усреднения:

$$< \operatorname{Re}A\cdot\operatorname{Re}B >= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\langle AB^*\right\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\langle A^*B\right\rangle$$

При использовании комплексной записи в общем виде

$$\boxed{\begin{array}{l} I = \dfrac{c}{8\pi}\operatorname{Re}(E\cdot E^*) \\ \textit{или} \\ I = \dfrac{c}{8\pi}\operatorname{Re}(H\cdot H^*) \end{array}}$$

Энергетические характеристики пучков и импульсов.

Пучок – это световой поток ограниченного сечения. Если по сечению пучка меняется только амплитуда, а волновой фронт остается постоянным, то такая волна называется квазиплоской.

$$E(x, y, z, t) = A(x, y)\cos(\omega t - kr)$$

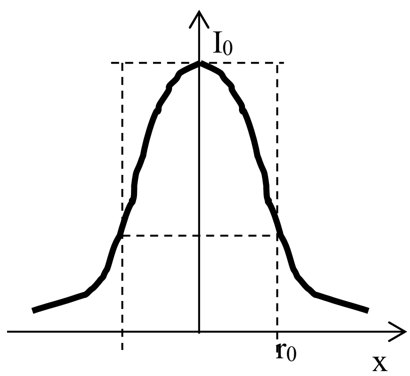
Тогда интенсивность такой волны также зависит от координат

$$I(x, y) = \frac{c}{8\pi} A^2(x, y)$$

Можно заменить такой пучок цилиндрическим пучком, введя эффективную интенсивность и эффективный радиус.

$$P = I_э \pi r_э^2; I_э = \frac{P}{\pi r_э^2}$$

Пример:



Рассмотрим Гауссов пучок, интенсивность которого изменяется по закону:

$$I(x, y) = I_0 \exp(-\frac{x^2 + y^2}{r_0^2})$$

Найдем полную мощность в таком пучке

$P = \int I(x, y) dxdy$.

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} I_0 \exp(-\frac{x^2 + y^2}{r_0^2}) dxdy,$$

учтем, что

$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{x^2}{r_0^2}) dx = r_0 \sqrt{\pi}$, (интеграл Пуассона),

получим

$$P = I_0 \pi r_0^2$$

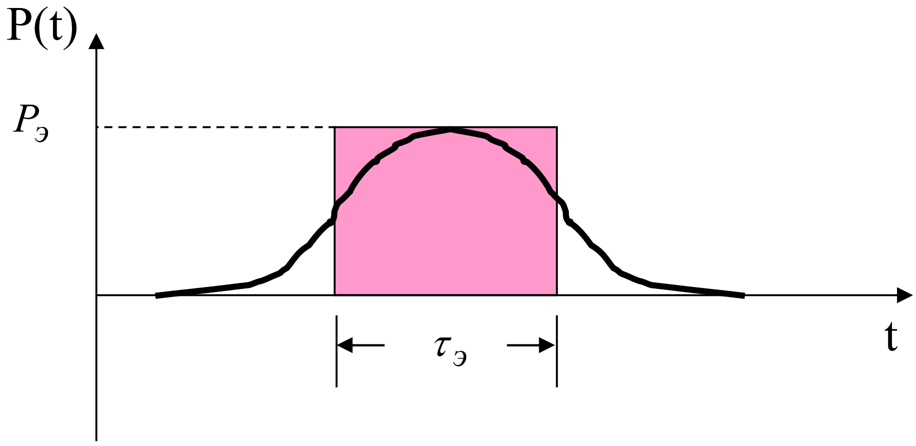
В этом случае эффективная интенсивность равна I_0, а эффективное сечение пучка πr_0^2, где r_0 - эффективный радиус, равный расстоянию на котором интенсивность уменьшается в e раз.

Импульс –ограниченный во времени поток энергии $W = P \cdot \tau_э$

Для импульса $I_э = \dfrac{W}{\pi r_э^2 \tau_э}$

Оценки и цифры:

1. He-Ne – лазер



$\lambda = 0{,}63 мкм$

$P = 10^{-2}\, Вт$

$r_э = 2 \cdot 10^{-1} см$

$$I_э = \frac{10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-2}} \approx 0{,}1\, Вт/см^2$$

Напряженность поля световой волны

$$E_0 = \sqrt{\frac{8\pi I}{c}}$$

$$E_0 = \sqrt{\frac{8 \cdot \pi \cdot 0{,}1 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^{10}}} = 3 \cdot 10^{-2} CGSE = 10\, в/см$$

2. Лазер работающий в импульсном режиме

Режим свободной генерации:

$\tau = 10^{-3} с, W_1 = 1 дж$

Мощность

$P = 10^3\, Вт$

Напряженность электрического поля

$E_0 = 10^3\, В/см$

Режим модулированной добротности:

$\tau = 10^{-8} с, W = 0{,}1 дж$

Мощность

$P = 10^7\, Вт$

Напряженность электрического поля
$E_0 = 10^5 \ В/см$