2.2 Физика теплового излучение

Тепловое излучение возникает за счет хаотического движения атомов и молекул является некогерентным, излучается в широком спектральном диапазоне.

Для описания теплого излучения вводится объёмная спектральная плотность излучения $\varepsilon(\nu,T)$, которая показывает количество энергии находящееся в единице объема и единичном спектральном интервале.

$\omega(T)=\int_0^{\nu}\varepsilon(\nu,T)d\nu$, где $\omega(T)$-объёмная плотность энергии.

$\varepsilon(\nu,T)$ - также называется излучательной способностью нагретого тела (спектральная плотность энергии.)

введем еще одну характеристику $A(\nu,T)=\dfrac{\Phi_{погл}}{\Phi_{пад}}$, которая называется - поглощательной способностью нагретого тела

Закон Кирхгофа. Отношение излучательной способности к поглощательной не зависит от вида тела.

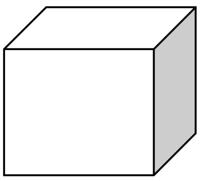
$$\frac{\varepsilon(\nu,T)}{A(\nu,T)}=u(\nu,T).$$

Можно ввести идеализированный объект, поглощательная способность которого $A(\nu,T)=1$, который называется абсолютно черным телом.

Тогда функция $u(\nu,T)$ -является излучательной способностью абсолютно чёрного тела или спектральной плотностью его излучения.

Моделью абсолютно черного тела (АЧТ) может служить излучение, помещённое в зеркальный ящик с абсолютно проводящими стенками. Такое излучение находится в **равновесии** с излучателем, в данном случае со стенками резонатора находящимися при температуре Т.

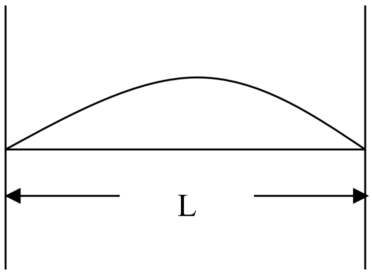
2.2.1 Формула Планка.



1. *Собственные колебания закрытого резонатора.*

В закрытом резонаторе могут возбуждаться не все типы колебаний, а только те, которые удовлетворяют условию образования стоячей волны.

Рассмотрим одномерный случай.



Между бесконечными зеркальными стенками, находящимися на расстоянии L могут образовываться волны, длины которых удовлетворяют условию:

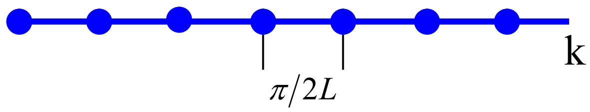
$L=n\cdot\dfrac{\lambda}{2}$, где n-целое число.

Соответствующие им частоты и волновые вектора определяются выражениями $\nu_n=n\cdot\dfrac{c}{2L}$;

$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{\pi n}{L}$$

Расстояния между соседними частотами $\Delta \nu = \dfrac{c}{2L}$; между волновыми числами

$\Delta k = \dfrac{\pi}{L}$.



В пространстве волновых чисел V_k на каждый вектор k

приходиться элементарный объем $\Delta V_k = (\dfrac{\pi}{L})^3$. Колебания происходящие в объеме резонатора описываются волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 E}{\partial Z^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \qquad \textbf{(1)}$$

Запишем решение уравнения (1) в виде

$$E(t) = E_0(t) \cdot \sin k_n z, \qquad (2)$$

подставим в уравнение (1), получим:

$$\frac{d^2 E_0(t)}{dt^2} = -(c^2 \cdot k_n{}^2) E_0(t)$$

$$\frac{d^2 E_0(t)}{dt^2} = -\omega_n{}^2 \cdot E_0(t) \qquad (3)$$

Поле внутри резонатора описывается уравнением осциллятора с частотой $\omega_n = c \cdot k_n$.

Решением уравнения (3) является выражение

$$E_0(t) = A_0 \cos \omega_n t \qquad (4).$$

Подставим (4) в (2) получим - уравнение стоячей волны

$$E = A_0 \cos(\omega_n t) \sin(k_n Z)$$

Поле в резонаторе имеет дискретный набор частот с разными энергиями.
Найдём число собственных колебаний лежащих в интервале (0,v)
В трёхмерном случае уравнение стоячей волны описывается выражением

$$E(x, y, z, t) = A \sin k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \sin k_z z \cdot \cos \omega t$$

Подставляя данное выражение в волновое уравнение (1)

Получим $k_x{}^2 + k_y{}^2 + k_z{}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} = k^2$

В пространстве k получим шар объёмом $\dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot k^3$

Для положительных $k_x k_y k_z$

$$V_k = \frac{1}{8}\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot k^3$$

Число колебаний $N_k = \frac{1}{8}\frac{4}{3}k^3 \cdot \frac{L^3}{\pi^2}$

$$N_k = \frac{1}{6}k^3 \cdot \frac{L^3}{\pi^2};\ k = \frac{2\pi\nu}{c}$$

$$N_\nu = \frac{1}{6}\frac{8L^3\nu^3\pi}{c^3} = \frac{4}{3}\frac{\pi L^3\nu^3}{c^3}$$

Число колебаний с частотами от 0 до v в единице объёма $n_\nu = \frac{4}{3}\frac{\pi\nu^3}{c^3}$

С учётом двух поляризаций $n_\nu = \frac{8}{3}\frac{\pi\nu^3}{c^3}$

В интервале частот dv в окрестности частоты v число колебаний

$$dn_\nu = \frac{8}{-}\frac{\pi\nu^2}{c^3}d\nu$$

Спектральная плотность мод (собственных колебаний)

$\frac{dn_\nu}{d\nu} = n_\nu(\nu) = \frac{8}{-}\frac{\pi\nu^2}{c^3}$ - число собственных колебаний в единице. объема в единичном спектральном интервале.

Для того, чтобы найти спектральную плотность энергии излучения $u(\nu, T)$ необходимо умножить спектральную. плотность мод на среднюю энергию одного колебания.

В классических представлениях распределение колебаний по энергиям задаётся статистикой Больцмана $n = n_0 e^{\frac{-w}{kT}}$ (где n(0) число частиц в системе.)

Где $e^{\frac{-w}{kT}}$ определяет вероятность возбуждения моды с энергией *w*. Считается , что в моде может быть какая угодно энергия (непрерывный спектр)Число мод с увеличением энергии уменьшается.

Средняя энергия мода (теплового колебания) $< w >= \frac{\int_0^\infty w e^{\frac{-w}{kT}} dw}{\int_0^\infty e^{\frac{-w}{kT}} dw} = kT$

Отсюда объемная спектральная плотность энергии определяется выражением $U(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT$.

Получили формулу Релея Джинса.

Формула Релея-Джинса хорошо описывает излучение нагретых тел в области низких частот, однако при переходе к высоким частотам $\nu \to \infty$ $u(\nu, T) \to \infty$. Данный парадокс получил название "Ультрафиолетовая катастрофа". Таким образом, волновые представления не позволяют получить правильный вид для функции спектральной плотности излучения нагретых тел.

3.Квантовые представления

М.Планк энергия мода может быть только дискретной.

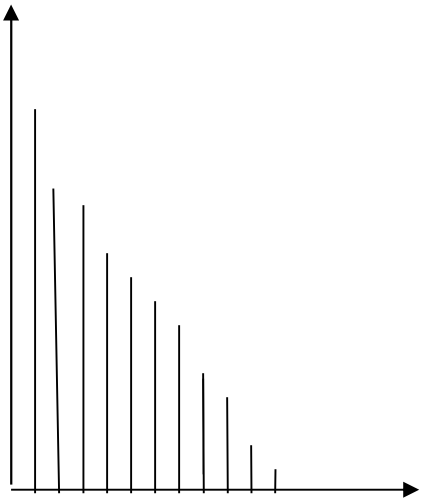
$\varepsilon_n \quad w_n = nh\nu$ где $w_0 = h\nu$ -наименьшая порция энергии, квант, h-постоянная Планка. Наименьшей порции энергии соответствует частица - фотон. Энергия моды определяется числом фотонов в моде.

Современные представления

$w_n = (n+\frac{1}{2})h\nu$,где $\frac{1}{2}h\nu$ энергия 0-колебания.

Так как всегда считается относительное изменение энергии, то $\frac{1}{2}h\nu$ не влияет на полученные результаты.

Больцмановское распределение заменяется дискретным распределением Средняя энергия в этом случае:



$$<w> = \frac{\sum_0^\infty nh\nu e^{\frac{-nh\nu}{kT}}}{\sum_0^\infty e^{\frac{-nh\nu}{kT}}}$$

Рассмотрим подробно суммы

$$\sum_0^\infty e^{\frac{-nh\nu}{kT}} = 1 + e^{\frac{-h\nu}{kT}} + e^{\frac{-2h\nu}{kT}} \ldots.$$

сумма ряда геометрической прогрессии

с $q = e^{\frac{-h\nu}{kT}}$; $\Sigma = \frac{1}{1-q}$, отсюда

$$\sum_0^\infty e^{\frac{-nh\nu}{kT}} = \frac{1}{1-e^{\frac{-h\nu}{kT}}}$$

Рассмотрим верхнюю сумму

$h\nu\sum_0^\infty e^{\frac{-nh\nu}{kT}}$ введем обозначение $-\frac{h\nu}{kT} = \alpha$ тогда

$$\sum ne^{+n\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\sum e^{n\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{1-e^{\alpha}}\right) = \frac{e^{\alpha}}{(1-e^{\alpha})^2}$$

т.е $h\nu\sum_0^\infty e^{\frac{-nh\nu}{kT}} = \frac{h\nu e^{\frac{-n\nu}{kT}}}{(1-e^{\frac{-n\nu}{kT}})^2}$ тогда $<w> = \frac{h\nu e^{\frac{-h\nu}{kT}}}{1-e^{\frac{-h\nu}{kT}}} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$

Спектральная плотность энергии

$$u(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

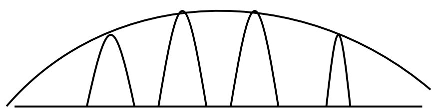
Получили формулу Планка

Рассмотрим более подробно $\frac{8\pi v^2}{c^3}$ - число мод в единичном спектральном интервале в единице объёма.

В объёме L^3 число мод - $\frac{8\pi v^2}{c^3} L^3 \Delta v$

Для абсолютно чёрного тела возбуждаются все моды их число $\approx \frac{8\pi L^3}{\lambda^3}$. В объеме $1дм^3$ возбуждается

$$\frac{(0.1м)^3}{(500*10^{-9})^3 м^3} = \frac{0.1^3}{(10^{-6})^3} \approx 10^{15} \text{ мод}.$$



Моды, входя под контур Планкового распределения, образуют сплошной спектр.

В случае лазерных источников применяются открытые без боковых стенок резонаторы, при этом возбуждается счётное количество мод, система имеет резонансные свойства. Спектр представляет набор дискретных линий, входящих под контур люминесценции

<u>4.Анализ</u>

<u>1.</u>Получить формулу Релея-Джинса

Низкие частоты .

hv<<kT,

Это возможно либо при

v→0 , либо при h→0

Разложим экспоненту в ряд:

$$e^{\frac{hv}{kT}} - 1 = 1 + \frac{hv}{kT} - 1 = \frac{hv}{kT}$$

Подставим в формулу Планка, получим переход к классическим представлениям

$$U(v,T) = \frac{8\pi v^2}{c^3} kT$$

2.Получить Закон Стефана-Больцмана.

Воспользуемся известным интегралом

$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$;, тогда можно записать

$$w = \frac{8\pi}{c^3} h \left(\frac{kT}{h}\right) \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

$w = \frac{8\pi}{c^3} h \int_0^\infty \frac{v^3 dv}{e^{\frac{hv}{kT}} - 1}$, или

$$w = \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3c^3}T^4$$

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{15h^3c^3}$$ -постоянная Больцмана

σ =7.56*10^{-16} дж.м$^{-3}$ к$^{-4}$

$w = \sigma T^4$ Закон Стефана-Больцмана

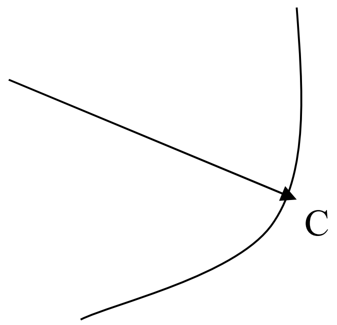
Можно получить энергетическую светимость (Интенсивность излучения)

$$M_{(T)} = \frac{c}{4}w$$

$$M_{(T)} = \sigma' T^4$$

σ'=5.67*10^{-8} вт. м^2 к$^{-4}$

Связь между W и M



$$d^2\phi = \frac{wc}{4\pi}d\Omega d\sigma \cos Q$$

$$B = \frac{wc}{4\pi}$$

Для изотропных источников

πB=M; M=wc/4

<u>Закон Смещения Вина</u>

Заменить $\lambda = \frac{c}{v}$

Учитывая $\varepsilon'(\lambda, T)d\lambda = \varepsilon(v, T)dv$

$$d\lambda = -\frac{c}{v^2}dv; \varepsilon'(\lambda, T) = \varepsilon(v, T)\frac{dv}{d\lambda}$$

$$\varepsilon'(\lambda, T) = \varepsilon(\frac{c}{\lambda}, T)\frac{c}{\lambda^2}$$

$$U'(\lambda, T) = \frac{8\pi h}{\lambda^3}\frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1} \cdot \frac{c}{\lambda^2}$$

В области. hv>>kT

$$U'(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}e^{-\frac{hc}{k\lambda T}}$$

$$\frac{dU}{d\lambda} = 8\pi hc(-\frac{5}{\lambda^6}e^{-\frac{hc}{k\lambda T}} + \frac{1}{\lambda^5}\frac{hc}{kT}\frac{1}{\lambda^2}e^{-\frac{hc}{k\lambda T}}) = \frac{8\pi hc}{\lambda^6}e^{-\frac{hc}{k\lambda T}}(-5 + \frac{hc}{kT\lambda}) = 0$$

$$T\lambda_{\max} = \frac{hc}{5R}$$

$$T\lambda_{\max} = b$$