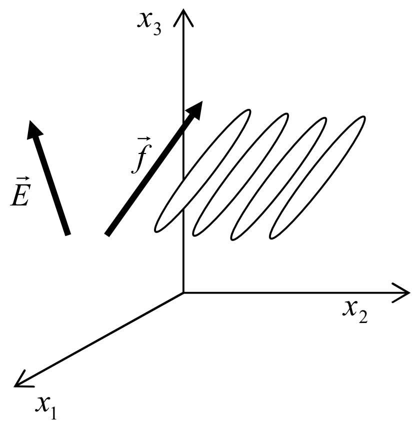
4.2 Оптика анизотропных сред.

4.2.1. Модель анизотропной среды.

Моделью анизотропной среды является система, состоящая из вытянутых молекул или других комплексов, в которых оптические электроны могут смещаться только вдоль одного, выбранного направления. Пусть это смещение характеризуется единичным вектором $\vec{f}$. Выбрали систему координат, в которой произвели замену $(x, y, z) \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) \Rightarrow x_i$.



Единичный вектор $\vec{f}$ в этом случае представлен, как $\vec{f} = \{f_1, f_2, f_3\} \Rightarrow f_i$. Электроны совершают колебания под воздействием электромагнитной волны, напряженность электрического поля $\vec{E}$ которой показана на рисунке.

Уравнение движения оптического электрона в этом случае имеет вид:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = e(\vec{f}\vec{E})/m .$$

поляризация

$\vec{P} = e\vec{f}xN$ или

$$\vec{P} = \frac{e^2}{m} N \frac{\vec{f}(\vec{f}\vec{E})}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$$

В отличии от изотропной среды, направление поляризации не совпадает с направлением вектора $\vec{E}$, то есть $\vec{P}$ не параллельно $\vec{E}$.

Введем диэлектрическую восприимчивость среды:

$$\chi_0 = \frac{e^2}{m} N \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$$

Рассмотрим скалярное произведение

$$(\vec{f}\,\vec{E}) = f_1E_1 + f_2E_2 + f_3E_3 = \sum_{i=1}^{3} fiE_i \Rightarrow f_iE_i ,$$

тогда $p_j = \chi_0 f_j f_i E_i$ (1)

или

$$p_1 = \chi_0 f_1 (f_1E_1 + f_2E_2 + f_3E_3)$$
$$p_2 = \chi_0 f_2 (f_1E_1 + f_2E_2 + f_3E_3)$$
$$p_3 = \chi_0 f_3 (f_1E_1 + f_2E_2 + f_3E_3) .$$

Введем тензорную диэлектрическую восприимчивость $\chi_{ij} = \chi_0 f_i f_j$.

Уравнение для поляризации можно представить в виде

$$p_j = \chi_{ji} E_i$$

или

$$p_1 = \chi_{11}E_1 + \chi_{12}E_2 + \chi_{13}E_3$$

$$p_2 = \chi_{21}E_1 + \chi_{22}E_2 + \chi_{23}E_3$$

$$p_3 = \chi_{31}E_1 + \chi_{32}E_2 + \chi_{33}E_3$$

Тензор χ_{ij} можно записать в виде матрицы

$$\chi_{ij} = \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix}$$

Найдем материальное уравнение для анизотропных сред $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$, для соответствующих компонент уравнение примет вид:

$D_j = E_j + 4\pi P_j$.

Запишем

$E_j = \delta_{ij}E_i$, где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j \\ 0 \text{ при } i \neq j \end{cases}$,

тогда

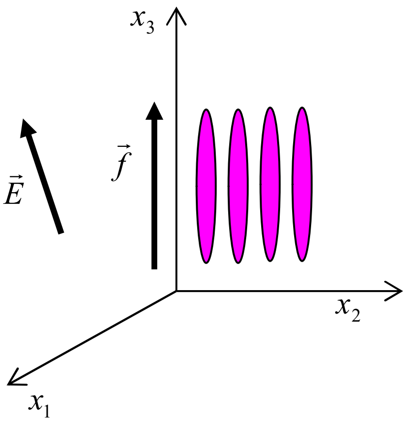
$D_j = E_i(\delta_{ij} + 4\pi\chi_{ij})$.

Материальное уравнение для анизотропной среды примет вид:

$D_j = \varepsilon_{ij}E_i$, где диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + 4\pi\chi_{11} & 4\pi\chi_{12} & 4\pi\chi_{13} \\ 4\pi\chi_{21} & 1 + 4\pi\chi_{22} & 4\pi\chi_{23} \\ 4\pi\chi_{31} & 4\pi\chi_{32} & 1 + 4\pi\chi_{33} \end{pmatrix}$$

Выберем систему координат, учитывающую симметрию кристалла, направим ось x_3' вдоль вектора $\vec{f}$, в этой системе $\vec{f} = \{0,0,1\}$, тогда



$$\chi'_{ij} = \chi_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + 4\pi\chi_0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

Всегда можно выбрать оси координат, в которых ε_{ij} приобретает диагональный вид

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Для этого необходимо найти собственные значения $\varepsilon_{ij} - \lambda$; и решить уравнение

$(\varepsilon_{ij} - \lambda\delta_{ij})E_j = 0$, где E_j - собственные вектора., λ - собственные значения.
В этой системе координат

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

Такая система называется главной кристаллической системой координат тензора диэлектрической проницаемости .

В этой системе связь между $\vec{D}$.

и $\vec{E}$ следующая

$D_x = \varepsilon_{xx}E_x$

$D_y = \varepsilon_{yy}E_y$

$D_z = \varepsilon_{zz}E_z$

Рассмотрим, когда вектор $\vec{E}$ направлен вдоль одной из осей.

1 $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$ в этом случае $\vec{D} = (D_x, 0, 0)$,то есть $\vec{E} \parallel \vec{D}$

Введем главное значение показателя преломления $n_x = \sqrt{\varepsilon_{xx}}$

$$V_x = \frac{c}{n_x}$$

$\vec{E} = (0, E_y, 0)$

$\vec{D} = (0, D_y, 0)$

$D_y = \varepsilon_{yy}E_y$

$V_y = \frac{c}{n_y}$, где $n_y = \sqrt{\varepsilon_{yy}}$

Если все главные компоненты тензора $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ различны по значению, то больше нет направлений, в которых векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$ были бы коллинеарны.

4.2.2. <u>Распространение электромагнитных волн в анизотропных средах.</u>

Рассмотрим волну, распространяющуюся в анизотропной среде. Направление волнового вектора в такой среде характеризуется единичным вектором:

$$\vec{e} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}.$$

Рассмотрим уравнения Максвелла:

$$\left[\vec{k} \times \vec{E}\right] = \frac{\omega}{c}\vec{H}$$

$$\left[\vec{k} \times \vec{H}\right] = -\frac{\omega}{c}\vec{D}.$$

Пусть в направлении $\vec{e}$ распространяется плоская электромагнитная волна

$\vec{E} = \vec{A}\exp - i(\omega t - \vec{k}\vec{r})$, волновой вектор которой

$$\vec{k} = \vec{e}\frac{\omega}{c}n(\vec{e}).$$

Тогда можем записать:

$$\vec{E} = \vec{A}\exp - i\omega\left(t - \frac{\vec{e}\vec{r}}{c}n(\vec{e})\right)$$

$$\vec{H} = \vec{B}\exp - i\omega\left(t - \frac{\vec{e}\vec{r}}{c}n(\vec{e})\right)$$

Подставим данные выражения в уравнения Максвелла, получим

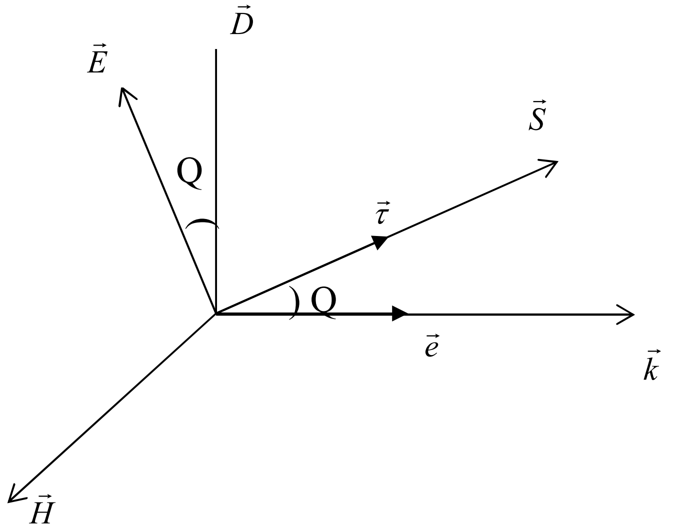
$$\vec{H} = \left[\vec{e} \times \vec{E}\right]n(\vec{e})$$

$$\vec{D} = -\left[\vec{e} \times \vec{H}\right]n(\vec{e}), \quad (*)$$

где

$$D_j = \varepsilon_{ij}E_i.$$

Рассмотрим ориентацию векторов $\vec{e}\perp\vec{D}$, $\vec{e}\perp\vec{H}$, $\vec{E}\perp\vec{H}$, вектор $\vec{E}$ лежит в плоскости $(\vec{e}\vec{D})$, угол между $\vec{D}$ и $\vec{E}$ называется углом анизотропии. Q≈5° для кальцита. Направление луча определяется направлением переноса энергии. Рассмотрим вектор Умова-Пойтинга.



$\vec{S} = \frac{C}{4\pi}\left[\vec{E} \times \vec{H}\right]$, при этом $\vec{S}\perp\vec{E}$ и $\vec{S}\perp\vec{H}$, луч распространяется в направлении вектора $\vec{S}$, определяемом единичным вектором $\vec{\tau}$. Направления распространения фазы и энергии не совпадают. Фаза движется по $\vec{e}$ со скоростью $V_ф$, а энергия по $\vec{\tau}$ со скоростью $V_л = V_ф / \cos Q$, эта скорость называется лучевой. Скорости связаны соотношением: $V_ф = V_л(\vec{e} \cdot \vec{\tau})$.

4.2.3. Уравнение нормали Френеля.

Из уравнений (*) получим

$$\vec{D} = -\left[\vec{e} \times \left[\vec{e} \times \vec{E}\right]\right]n^2(\vec{e}).$$

$$\vec{D} = n^2(\vec{e})\left(\vec{E} - \vec{e}(\vec{e}\vec{E})\right)$$

Рассмотрим компоненты вектора $\vec{D}$ в главной кристаллической системе

$$\begin{cases} D_x = \varepsilon_{xx} E_x & D_x = n^2 (E_x - e_x (\vec{e}\vec{E})) \\ D_y = \varepsilon_{yy} E_y & D_y = n^2 (E_y - e_y (\vec{e}\vec{E})) \\ D_z = \varepsilon_{zz} E_z & D_z = n^2 (E_z - e_z (\vec{e}\vec{E})) \end{cases}$$

Получим:

$$\begin{cases} D_x = -\dfrac{e_x (\vec{e}\vec{E})}{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{\varepsilon_{xx}}} & \times e_x \\ D_y = -\dfrac{e_y (\vec{e}\vec{E})}{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{\varepsilon_{yy}}} & \times e_y \qquad + \\ D_z = -\dfrac{e_z (\vec{e}\vec{E})}{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{\varepsilon_{zz}}} & \times e_z \end{cases}$$

Скалярное произведение $(\vec{D} \cdot \vec{e}) = 0$, см. ориентацию векторов. Отсюда:

$$\left(\vec{e} \cdot \vec{E}\right) \left(\frac{e_x^2}{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{\varepsilon_{xx}}} + \frac{e_y^2}{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{\varepsilon_{yy}}} + \frac{e_z^2}{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{\varepsilon_{zz}}} \right) = 0 .$$

Уравнение распадается на два

1. $\left(\vec{e} \cdot \vec{E}\right) = 0$, это обыкновенная волна
2. Уравнение нормали Френеля:

$$\left(\frac{e_x^2}{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{\varepsilon_{xx}}} + \frac{e_y^2}{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{\varepsilon_{yy}}} + \frac{e_z^2}{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{\varepsilon_{zz}}} \right) = 0$$

Данное уравнение 4-го порядка, имеет 4 корня, из них разных 2.

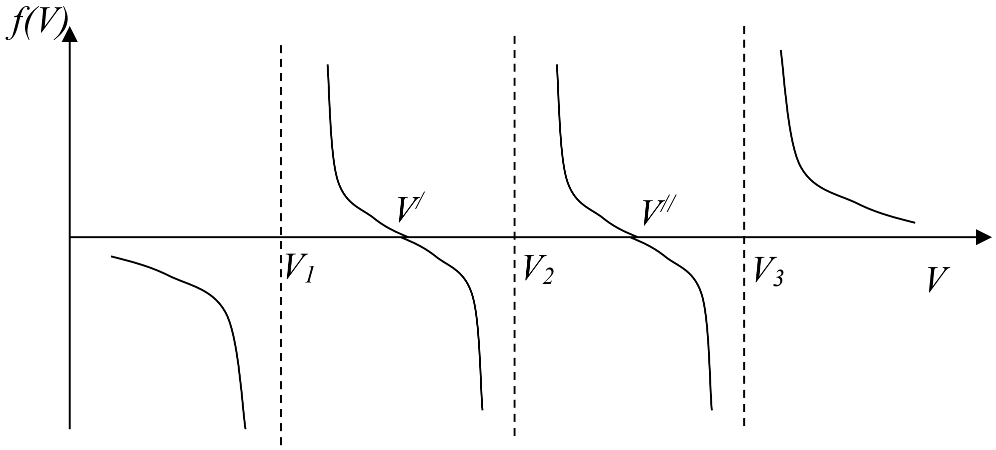
Умножим уравнение на $\dfrac{1}{C^2}$ и получим уравнение для фазовых скоростей:

$$\left(\frac{e_x^2}{V^2 - V_x^2} + \frac{e_y^2}{V^2 - V_y^2} + \frac{e_z^2}{V^2 - V_z^2} \right) = 0 .$$

Введем функцию

$$\left(\frac{e_x^2}{V^2-V_x^2}+\frac{e_y^2}{V^2-V_y^2}+\frac{e_z^2}{V^2-V_z^2}\right)=f(V)$$

Решим данное уравнение графически.
Получим две скорости распространения волны в данном направлении V' и V''.
Покажем что вектора индукции, соответствующие этим волнам перпендикулярны между собой,



$$\begin{cases}\vec{D}'=n^2(\vec{E}'-e_x(\vec{e}\vec{E}'))\\ \vec{D}''=n^2(\vec{E}''-e_y(\vec{e}\vec{E}''))\end{cases}$$ Умножим на $\left|\begin{matrix}\times\vec{D}''\\ \times\vec{D}'\end{matrix}\right.$ и вычтем уравнения

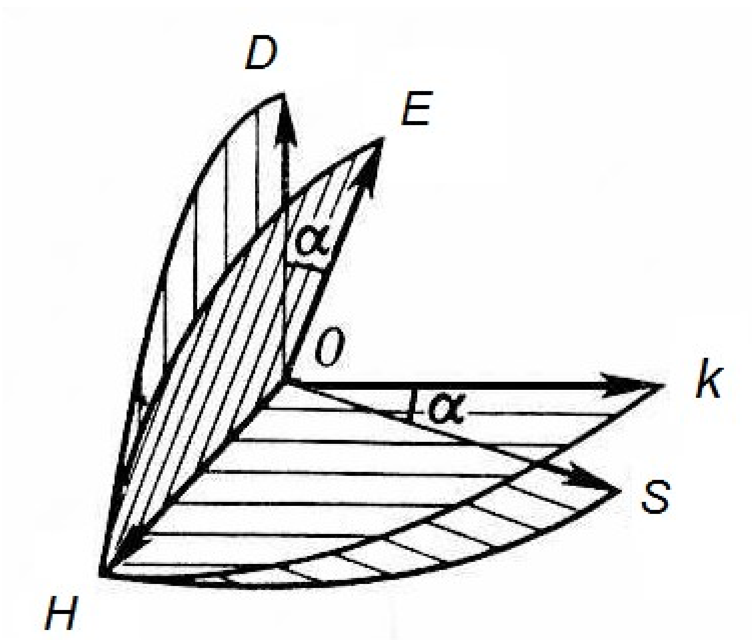
Получим $\vec{D}'\vec{D}''\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{n''}\right)=\vec{E}'\vec{D}''-\vec{D}'\vec{E}''$, рассмотрим выражение $\vec{E}'\vec{D}''-\vec{D}'\vec{E}''$

$\vec{E}'\vec{D}''=E_i'D_i'=E_i'\varepsilon_{ij}E_j''=E_j''\varepsilon_{ij}E_i'=E_j''D_j'=\vec{E}''\vec{D}'$, отсюда $\vec{E}'\vec{D}''-\vec{D}'\vec{E}''=0$, и $\vec{D}'\vec{D}''=0$
то есть $\vec{D}'\perp\vec{D}''$.
Пример: Рассмотрим случай, $\vec{k}\,//\,\vec{Z}$, т.е. $e_x=0,\quad e_y=0,\quad e_z=1$, уравнение Френеля после приведения к общему знаменателю имеет вид:

$\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_{xx}}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_{yy}}\right)=0$, корни уравнения $n^2=\varepsilon_{xx},\quad n^2=\varepsilon_{yy}$,

в данном направлении распространяется две волны со скоростями $V_x=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}}$ и

$V_y=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{yy}}}$.


D
E
α
0
K
α
S
H